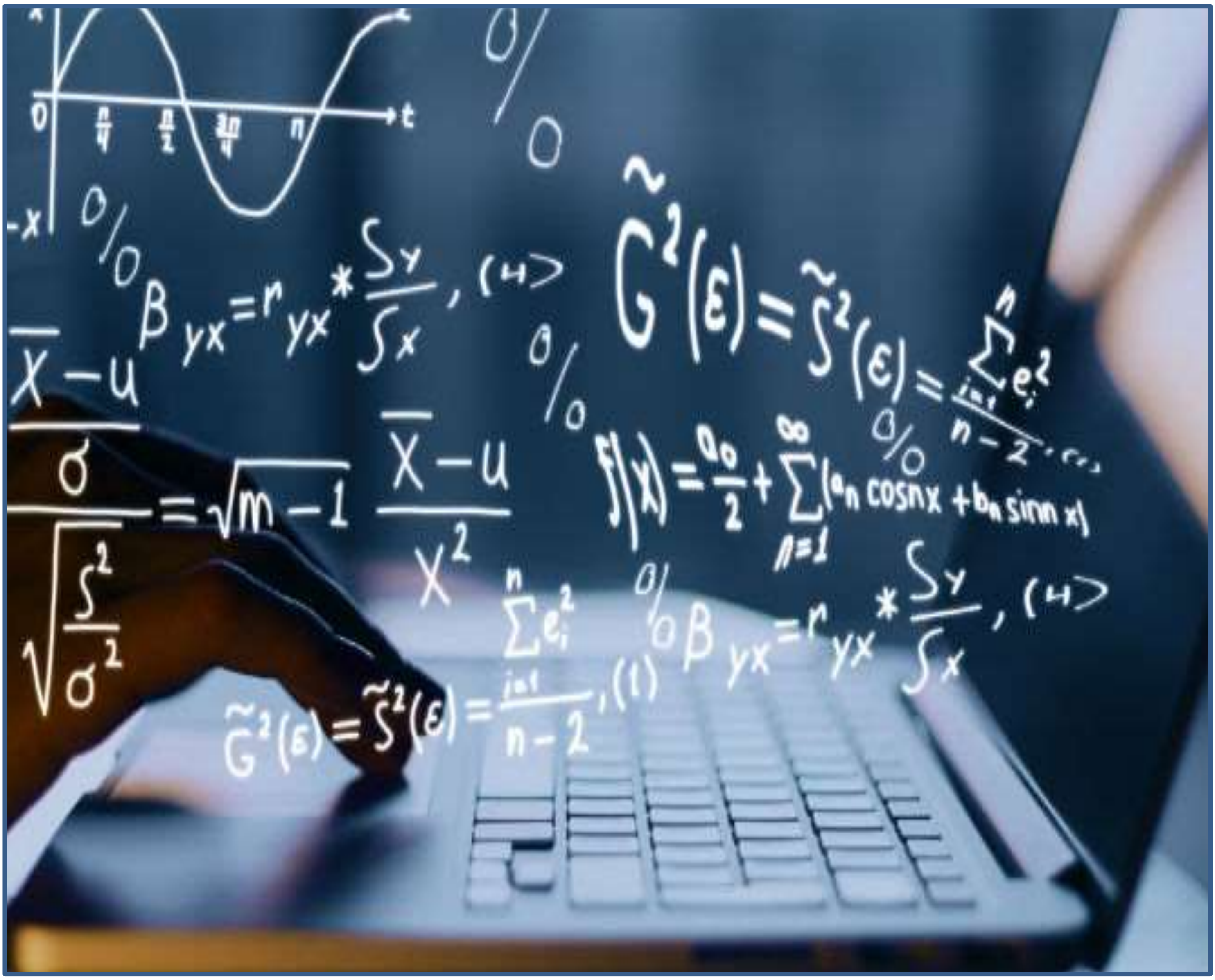
INGRESO 2026



MATEMÁTICAS

Teoría

Carreras: Ingeniería Agronómica, Licenciatura en Bromatología, Bromatología, Ingeniería en Recursos Naturales Renovables, Tecnicatura Universitaria en Viticultura y Enología

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE CIENCIAS AGRARIAS

CAAyN
Comisión Asesora de Admisión y Nivelación

MATEMÁTICA

TEORÍA

CURSO DE NIVELACIÓN: INGRESO 2026

AUTORES: Bageta, Rubén;
Bevaqua, Alicia;
Cecconato, Adrián;
Garriga, Marcela;
Montalto, María Elena;
Pivetta, Amalia;
Tirador, Marta.

Facultad de Ciencias Agrarias – UNCUYO

INDICE

CONJUNTOS NUMÉRICOS

CONJUNTOS NUMÉRICOS

En la segunda mitad del siglo XIX, el matemático Krönecker sostuvo que los números naturales eran obra de Dios y todo lo demás en Matemática obra del hombre, contraponiéndose a posturas de otros matemáticos contemporáneos. Lo cierto es que en los comienzos de nuestra civilización surgió la necesidad de contar y con ello las primeras nociones acerca del número. Aparecieron entonces los números naturales, ocupando un lugar muy importante en la Matemática y es a partir de ellos que se definen el conjunto de los números enteros, el conjunto de los números racionales, y muchos otros conceptos matemáticos.

Los problemas de medida se pudieron resolver con los números racionales que permitieron fraccionar la unidad. Explorando la Geometría, los matemáticos de los pueblos de la antigüedad descubrieron que el campo numérico era insuficiente. En su afán de encontrar la medida de la longitud de la circunferencia y la medida de la diagonal del cuadrado aparecieron los números irracionales.

Mucho tiempo después se llamó números reales, al conjunto que incluye todos estos números.

En 1614 John Napier, llamado Neper o Neperius, inventó los logaritmos, del griego logos, razón, y arithmos, número. Un logaritmo es un número que indica el exponente al que hay que elevar otro dado para que resulte un tercero también conocido.

El matemático inglés John Wallis (1616-1703) fue el que consiguió dar sentido a los números imaginarios y a los números complejos hacia 1685.

En 1744 el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) descubrió los números trascendentales, que son los que jamás constituirán una solución a cualquier ecuación algebraica que pueda escribirse.

En 1845 el matemático irlandés William Rowan Hamilton (1815-1865) comenzó a trabajar con números hipercomplejos, o como él los llamó: "cuaternios". Recién a mediados del siglo XIX, Cantor, Dedekind y Weierstrass desarrollaron teorías rigurosas del número real.

Con esta breve introducción, queremos que comprendas la importancia que tienen los conjuntos numéricos y que fueron apareciendo a medida que las necesidades de la vida real, hacían insuficientes los números conocidos hasta ese momento.

En este módulo, partiremos de los números naturales y haciendo una construcción muy intuitiva llegaremos al conjunto de los números reales. Abordaremos luego las operaciones y propiedades de ellas**,** para terminar con situaciones problemáticas aplicadas a casos de la vida diaria.

SÍMBOLOS Y RELACIONES ENTRE ELEMENTOS Y CONJUNTOS

Comencemos diciendo qué entendemos por conjunto. Es un concepto primario, que formalmente no se define, pero para nuestros propósitos basta decir que un conjunto es una colección de objetos. Estos objetos de la colección pueden ser cosas tales como letras, personas, números, etc. Cada uno de estos objetos se llaman elementos o miembros del conjunto. En particular estamos interesados en conjuntos cuyos elementos son números. Se suele representar a los conjuntos mediante letras imprenta mayúsculas y a sus elementos con letras imprenta minúsculas.

La siguiente representación: $A = \{1,2,3,6\}$ indica que el conjunto A tiene por elementos a los números 1,2,3,6. Nótese que al listar los elementos se colocan entre llaves.

Es de suma importancia, tener presente que existen **relaciones fundamentales** que se señalan con símbolos específicos, para vincular un elemento con un conjunto o dos conjuntos entre sí, y las operaciones entre conjuntos.

A continuación, mediante la siguiente tabla, podrás observar estas relaciones con su respectiva notación simbólica. Es relevante que no las confundas.

Elemento – conjunto	Conjunto – conjunto	Operaciones entre conjuntos
$\in$ **pertenece** $\notin$ **no pertenece**	$\subset$ **está incluido** $\not\subset$ **no está incluido**	$\cup$ **unión** $\cap$ **intersección**

Es decir, entre un elemento y un conjunto se establece una relación de pertenencia. Dado un conjunto y sus elementos, es posible decidir si un elemento dado pertenece o no al conjunto.

Asimismo, la relación de inclusión se dá sólo entre conjuntos, y se puede encontrar el conjunto unión o intersección operando entre ellos. Por ejemplo:

Si el conjunto A tiene como elementos a las letras m, n, o, p, simbólicamente se escribe:

$$A = \{m, n, o, p\}$$

De igual manera podemos definir por extensión (nombrando todos sus elementos) otros conjuntos:

$$B = \{n, o, p\};\ C = \{r, s, o, q\}$$

De acuerdo a la tabla presentada anteriormente, analicemos las siguientes relaciones y operaciones e indiquemos con verdadero o falso su veracidad, justificando la respuesta.

- $p \in A$ $(\boldsymbol{V})$ puesto que p es un elemento del conjunto A.
- $p \notin B$ $(\boldsymbol{F})$ puesto que p es un elemento del conjunto B.
- $p \in C$ $(\boldsymbol{F})$ puesto que p no es un elemento del conjunto C.
- $q \in B$ $(\boldsymbol{F})$ puesto que q no es un elemento del conjunto B.
- $m \notin B$ $(\boldsymbol{V})$ puesto que m no es un elemento del conjunto B.
- $p \subset A$ $(\boldsymbol{F})$ puesto que p es un elemento del conjunto A, y la relación de inclusión se da entre conjuntos y no entre un elemento y un conjunto.
- $B \subset A$ $(\boldsymbol{V})$ puesto que todo elemento del conjunto B pertenece al conjunto A.
- $A \subset B$ $(\boldsymbol{F})$ puesto existen elementos del conjunto A que no pertenecen al conjunto B.
- $B \cup C = \{n, o, p, r, s, q\}$ $(\boldsymbol{V})$ puesto que, dado un elemento de este nuevo conjunto, pertenece al conjunto B **o bien,** al conjunto C.
- $A \cap C = \{o\}$ $(\boldsymbol{V})$ puesto que o es un elemento del conjunto A **y** del conjunto B.

Existen dos maneras de representar los elementos de un conjunto:

a) Por exptensión: Se listan en forma exhaustiva todos los elementos que componen al conjunto. Por ejemplo: $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

b) Por comprensión: Se define el conjunto indicando una propiedad o condición que cumplen los elementos del mismo. Es el caso en que no se puede dar una lista exhaustiva de los elementos del conjunto, típicamente debido a que se trata de conjuntos con infinita cantidad de elementos. Por ejemplo: $B = \{x/x\ es\ un\ número\ par\}$.

Teniendo presente las relaciones antes vistas, te proponemos las siguientes actividades.

Actividad Nº 1

Dados los conjuntos: $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{4,5,6\}$ y $C = \{3,4\}$;

a) Completa con la relación que corresponde:

$4 \ldots\ldots A$	$4 \ldots\ldots B$	$4 \ldots\ldots C$
$3 \notin \ldots\ldots$	$1 \in \ldots\ldots$	$5 \in \ldots\ldots$
$A \not\subset \ldots\ldots$	$C \subset \ldots\ldots$	$C \not\subset \ldots\ldots$

b) Realiza las operaciones indicadas:

$A \cup B = \{$ $\qquad$ $A \cap C = \{$ $\qquad$ $A \cup C = \{$

Los números se agrupan en conjuntos numéricos de acuerdo a las operaciones que se pueden realizar con ellos. Comencemos nuestro análisis por el conjunto de los números naturales.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

El conjunto de los números naturales fue nuestra primera aproximación a los conjuntos numéricos, que como antes decíamos, surgió del conteo de cosas. Recordemos su formación y propiedades:

$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5 \ldots\}$, si consideramos el cero, $\mathbb{N}_{\mathbf{0}} = \{0,1,2,3,4,5 \ldots\}$

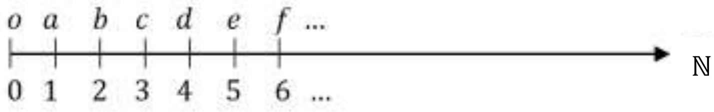
Propiedades:

Este conjunto:

- Es ordenado: dado un elemento, se puede decidir el anterior y el siguiente.
- Tiene primer elemento y no tiene último: es un conjunto de infinitos elementos.
- Tiene un sucesor para cada elemento.
- Es discreto. Es decir, entre dos números naturales hay un número finito de números naturales.

Interpretación gráfica

Para representar los números naturales se considera una semirrecta de origen o (en correspondencia con el 0), y un segmento $\overline{oa}$, cuya longitud se toma como unidad, y que superponemos sucesivamente sobre la semirrecta para encontrar los puntos a, b, c …., en correspondencia con los números naturales $1, 2, 3, \ldots$



Teniendo en cuenta esta representación, diremos que:

- un número representado por a es igual a otro representado por b, si a ocupa el mismo lugar que b sobre la recta numérica. Lo denotamos $a = b$.
- un número representado por a es menor que otro representado por b, si a está a la izquierda de b sobre la recta numérica. Simbólicamente, lo denotamos $a < b$.
- un número representado por a es mayor que otro representado por b, si a está a la derecha de b sobre la recta numérica. Simbólicamente, lo denotamos $a > b$.

Actividad Nº 2

Completa las siguientes proposiciones y halla un ejemplo en la recta numérica para cada caso

- Si $a = b$, los puntos representativos de a y b ……………..…………………………. Ejemplo: ……………………..……………..
- Si $c > b$, el punto representativo de c está a la ………………………… del punto representativo de b. Ejemplo: ……………………………….
- Si $d < b$, el punto representativo de d está a la ……………………… del punto representativo de b. Ejemplo: ……………………………….
- Dibuja la recta numérica, destaca sobre ella los puntos correspondientes a los números 3 y 8. Compara esos números, y expresa simbólicamente como es 3 respecto de 8 y 8 respecto de 3:

$3 \ldots\ldots\ldots\ 8$ y $8\ \ldots\ldots\ldots\ 3$

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

En el conjunto de los números naturales, podemos realizar las operaciones de suma, multiplicación, potenciación con exponente natural, pero la resta entre dos números naturales sólo es posible si el minuendo es mayor o igual que el sustraendo.

Ante la imposibilidad de realizar la resta cuando el minuendo es menor que el sustraendo, surge el conjunto de los números enteros como una ampliación de los números naturales.

El conjunto de los números enteros está formado por la unión de los números naturales ($\mathbb{N}$) (o enteros positivos), el cero y los números enteros negativos ($\mathbb{Z}^-$), y lo nombramos con la letra $\mathbb{Z}$.

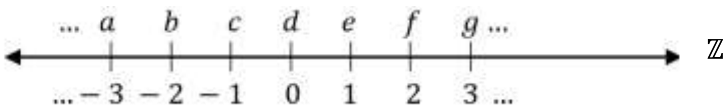
$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$, es decir $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Propiedades:

- Es un conjunto con infinitos elementos.
- Cada número entero tiene un único antecesor y un único sucesor.
- Es discreto. Es decir, entre dos números enteros hay un número finito de números enteros.
- A cada número entero le corresponde un punto de la recta, pero no a todo punto de la recta le corresponde un número entero.
- El opuesto de un número entero a es $-a$ y, el opuesto de $-a$ es a.
- El opuesto de cero es cero.

Interpretación gráfica

Para representar los números enteros se considera una recta y sobre ella un punto o (llamado origen), y un segmento $\overline{oa}$, cuya longitud se toma como unidad, y que superponemos sucesivamente sobre la recta (a la izquierda y a la derecha de o) para encontrar los puntos a, b, c, d, e, f …., en correspondencia con los números enteros $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$



Actividad Nº 3

Teniendo en cuenta la representación de los números enteros completa las siguientes proposiciones con $>$, $<$ o $=$, y expresa un ejemplo para cada caso.

a) Todo número natural es ……………… que cero.

b) Todo número negativo es ……………… que cero y por lo tanto menor que cualquier ………………

c) Dibuja la recta numérica, destaca sobre ella los puntos correspondientes a los números -3 y -8; y, 3 y 8. Compara esos números, y expresa simbólicamente como es -3 respecto de -8 y 8 respecto de 3.

$$-3 \dots\dots\dots -8 \quad \text{y} \quad 3 \dots\dots\dots 8$$

$$-8 \dots\dots\dots -3 \quad \text{y} \quad 8 \dots\dots\dots 3$$

d) Generaliza en la siguiente expresión los resultados obtenidos en el item anterior: Dados dos números negativos $-a$ y $-b$, con a y b naturales, entonces:

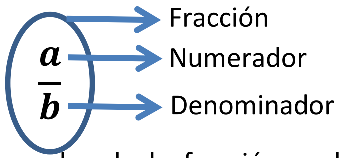
$$-a < -b \Leftrightarrow a \dots\dots\dots b$$

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

No siempre el cociente de dos números enteros, es un número entero. El cociente entre dos números enteros $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{b}$ distinto de cero, representa un número racional. Surge entonces el conjunto de los números racionales como una ampliación del conjunto de los números enteros.

El conjunto de los número racionales se simboliza $\mathbb{Q}$.

Recordemos una notación muy utilizada para este cociente (llamado fracción), que se escribe:



El número a se llama numerador de la fracción y el número b, recibe el nombre de denominador de la misma.

Definimos formalmente número racional como el cociente $\frac{a}{b}$ de números enteros, donde $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$.

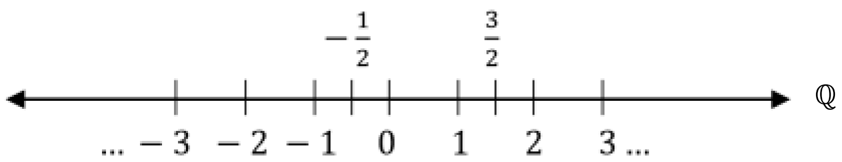
Observemos que todo entero es un número racional, pues si $n \in \mathbb{Z}$, entonces siempre podemos escribirlo como $\frac{n}{1} = n$. Luego, como respeta la definición de número racional, decimos que $n \in \mathbb{Q}$, o lo que es lo mismo, estamos afirmando que: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Propiedades:

- Es un conjunto con infinitos elementos.
- Es un conjunto denso. Es decir, entre dos números racionales hay un número infinito de números racionales.
- A cada número racional le corresponde único punto sobre la recta.
- Dado cualquier número m entero distinto de cero, las expresiones $\frac{a}{b}$ y $\frac{ma}{mb}$ representan el mismo número racional.

Interpretación gráfica

Para representar los números enteros, seguimos el mismo procedimiento de los casos anteriores, sólo que ahora incorporamos los infinitos números que se encuentran entre dos enteros:



El orden en el conjunto de los números racionales

Dados dos números racionales, si quieres decidir rápidamente cuál de ellos es mayor, recuerda que para compararlos cuentas con la siguiente regla:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$$
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$
$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc$$

Actividad Nº 4

a) Coloca los símbolos $>$, $<$ o $=$, según corresponda entre cada par de números racionales.

I) $-\frac{1}{2}\ldots\ldots\frac{5}{4}$	II) $-\frac{7}{6}\ldots\ldots-\frac{6}{5}$	III) $\frac{8}{5}\ldots\ldots\frac{16}{10}$
IV) $-1\ldots\ldots2$	V) $\frac{1}{2}\ldots\ldots\frac{1}{3}$	VI) $\frac{1}{4}\ldots\ldots-\frac{1}{3}$

b) Ordena de menor a mayor los números racionales nombrados en el ítem anterior.

c) Dibuja sobre la recta numérica, los números anteriormente propuestos.

Expresión decimal de un número racional

Al calcular el cociente entre dos números enteros podemos obtener distintos tipos de resultados en cuanto a la notación. ¿Recuerdas cuáles son?

Veamos algunos ejemplos que te orientarán:

a) $\frac{3}{4}=0{,}75$ *b)* $\frac{7}{5}=1{,}4$ *c)* $\frac{8}{3}=2{,}66666\ldots$ *d)* $\frac{25}{6}=4{,}16666\ldots$

En los dos primeros casos obtuvimos un cociente exacto entre los números enteros dados, en su representación decimal, y que llamamos *números racionales decimales*, puesto que pueden expresarse como una razón cuyo denominador es una potencia de diez. Mientras que para las dos últimas expresiones los cocientes no resultan exactos por lo que podemos obtener una representación aparentemente decimal, con cifras que se repiten de manera periódica y que llamamos *números racionales periódicos.*

A todo número racional escrito en notación fraccionaria es posible asociarle una notación decimal, o aparentemente decimal, que es exacta o periódica respectivamente.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Ahora bien, ¿puedes representar a todos los números que conoces mediante fracciones? Antes de contestar, toma tu calculadora, resuelve las siguientes situaciones y decide si los números que obtienes como resultado se comportan como alguno de los elementos de los conjuntos analizados.

$a)\ \sqrt{2}=$

$b)\ \sqrt[3]{9}=$

$c)\ \pi=$

$d)\ e=$

Seguramente coincidimos que estas expresiones no son números racionales periódicos ni exactos. No corresponden al cociente entre números enteros. Este tipo de expresiones son elementos de un nuevo conjunto que es el conjunto de los *números irracionales***,** que representaremos con la letra ***I*****.**

Fueron los pitagóricos quienes descubrieron los números irracionales al aplicar el Teorema de Pitágoras en un triángulo cuyos catetos eran iguales a la unidad**.** Al tratar de calcular la hipotenusa se encontraron que su medida era la raíz cuadrada de dos y que no representaba un número conocido hasta el momento**.**

Para estos matemáticos, los números naturales constituían el principio de todas las cosas, por esta causa, mantuvieron el descubrimiento de los irracionales en el más estricto secreto. El nombre de **“***irracional***”** proviene del hecho de que *"estos números no se pueden expresar como una razón o cociente de dos números enteros"***.**

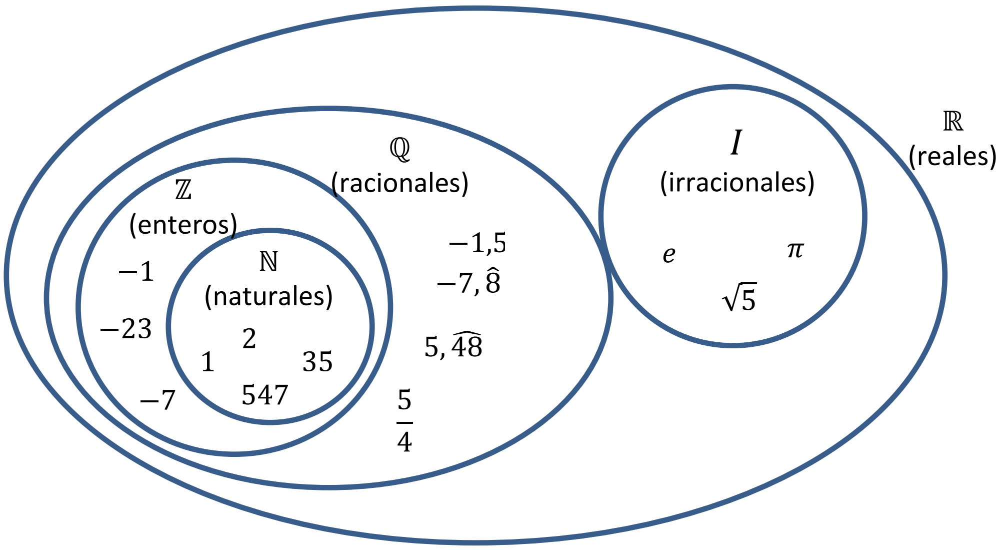
El conjunto formado por los racionales y los irracionales se llama *conjunto de números reales,* y se designa con el símbolo $\mathbb{R}$.

Propiedades:

- Es un conjunto con infinitos elementos.
- No tiene primero ni último elemento.
- Es un conjunto denso. Es decir, entre dos números reales hay un número infinito de números reales.
- Ningún número real tiene sucesor ni antecesor.
- A cada número real le corresponde único punto sobre la recta, y a todo punto de la recta le corresponde un número real.

Haciendo una síntesis de los conjuntos numéricos revisados hasta el momento, podemos realizar el siguiente cuadro, recordando que:

- todo número natural es un número entero.
- todo número entero se puede escribir como un número racional en notación fraccionaria, utilizando para ello una fracción con denominador uno.



Actividad Nº 5

Determinar si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas, encerrando en un círculo la opción correcta.

a) $\mathbb{N} \supset \mathbb{Z}$ V - F

b) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$ V - F

c) $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{R}$ V - F

d) $\sqrt[3]{-8} \in \mathbb{Z}$ V - F

e) $-3 \in \mathbb{Q}$ V - F

f) $\mathbb{R} \subset I$ V - F

OPERACIONES CON NÚMEROS REALES. PROPIEDADES

Cuando operamos con números (sumamos, restamos, multiplicamos, etc.) hay ciertas reglas que debemos respetar. Recordemos la *forma de operar* con el conjunto de los reales.

Adición

• *con igual denominador*

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c} \text{ y, recíprocamente: } \frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$$

• *con distinto denominador*

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{ad \pm bc}{cd}$$

Multiplicación

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

División

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a}{c}\,\frac{d}{b} = \frac{ad}{cb} \quad con\ b \neq 0\ y\ d \neq 0$$

Veamos algunas de las *propiedades* más usadas para poder operar con estos conjuntos numéricos.

a) Propiedad conmutativa
- de la suma: $a + b = b + a$
- de la multiplicación: $a\ b = b\ a$

b) Propiedad asociativa
- de la suma: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- de la multiplicación: $(a\ b)\ c = a\ (b\ c)$

c) Propiedad distributiva

- del producto respecto de la suma y la resta: $a\,(b \pm c) = a\,b \pm a\,c$
- del cociente respecto de la suma y la resta: $\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$

Esta última propiedad, no puede aplicarse en las divisiones cuando la suma o la resta se encuentra en el denominador, es decir:

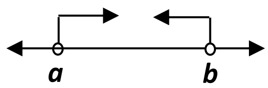
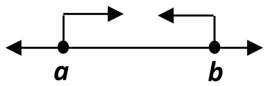
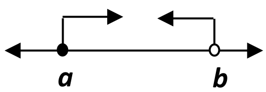
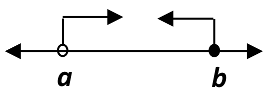
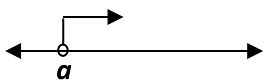
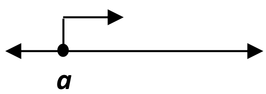
$$\frac{a}{b \pm c} \neq \frac{a}{b} \pm \frac{a}{c}$$

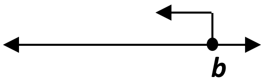
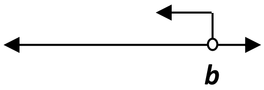
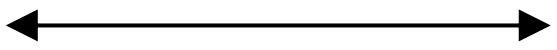
INTERVALOS

Frecuentemente trabajaremos con **subconjuntos de números reales:** a) para dar el conjunto solución de una inecuación, b) para describir características de una función, c) para interpretar con símbolos matemáticos una expresión coloquial. Por ejemplo, el siguiente párrafo: *"el peso de la ballena franca, que visita de julio a diciembre las costas de la península Valdés oscila entre 30 y 45 toneladas".*

A estos *subconjuntos de números reales* se los llama *intervalos. ¿Qué es un intervalo?*

Dados dos números reales a y b, donde $a < b$, definimos los siguientes intervalos:

Notación	Descripción del conjunto	Gráfico
$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ Abierto	$\{x \in \mathrm{IR} \,/\, a < x < b\}$	
$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ Cerrado	$x \in IR/a \leq x \leq b\}$	
$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ cerrado a izquierda o abierto a derecha	$\{x \in \mathrm{IR}/a \leq x < b\}$	
$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ abierto a izquierda o cerrado a derecha	$\{x \in \mathrm{IR}/a < x \leq b\}$	
$(\boldsymbol{a}, \infty)$	$\{x \in \mathrm{IR}/x > a\}$	
$[\boldsymbol{a}, \infty)$	$\{x \in \mathrm{IR}/x \geq a\}$	

$(-\infty, \boldsymbol{b}]$	$\{x \in \mathrm{IR} / x \leq b\}$	
$(-\infty, \boldsymbol{b})$	$\{x \in \mathrm{IR} / x < b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{IR}\}$	

<u>Observación:</u> el símbolo ∞ se utiliza para indicar un número infinitamente grande, pero no se debe considerar a ∞ como un número real.

VALOR ABSOLUTO

Dado un número real b definimos: $|b| = \begin{cases} b \; si \; b \geq 0 \\ -b \; si \; b < 0 \end{cases}$

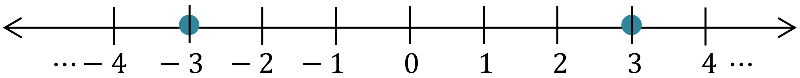
Observación: La expresión anterior se lee: "Dado un número real b definimos valor absoluto de b (o módulo de b) al mismo número b si éste es positivo o igual a cero; o a $-b$ si éste es negativo".

Interpretación geométrica

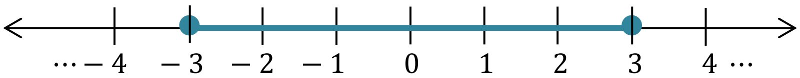
Hemos visto la representación de los distintos conjuntos numéricos sobre la recta numérica, tenemos ahora $|x|$. ¿Podríamos encontrar el o los puntos de la recta que lo representan?

Veamos el siguiente ejemplo:

Si $|x| = 3$, significa que $x = 3$, si $x \geq 0$, pero $x = -3$, si $x < 0$.

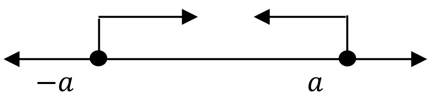


Pero si ahora escribimos $|x| \leq 3$, significa que $x \leq 3$, si $x \geq 0$, pero $x \geq -3$, si $x < 0$. Si representamos sobre la recta numérica, veremos que se trata "*del conjunto de todos los números reales comprendidos entre -3 y 3*"

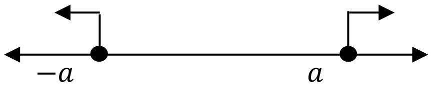


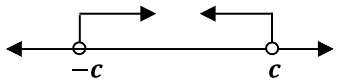
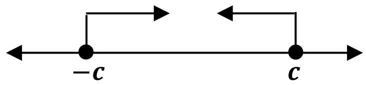
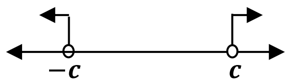
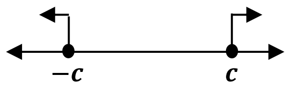
Por lo tanto, si $a \in \mathrm{IR}$ y $a > 0$, entonces:

$$|\boldsymbol{x}| \leq \boldsymbol{a} \;\; \textbf{\textit{es equivalente a escribir}} \;\; -\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{a}$$



$$|x| \geq a \ \textit{es equivalente a escribir}\ x \geq a \quad o \quad x \leq -a$$



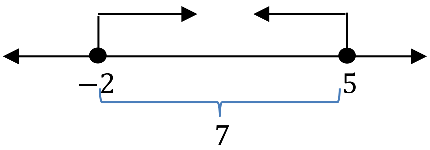
Valor absoluto	*Desigualdad*	*Notación de intervalo*	*Representación gráfica*
$\|x\| < c$	$-c < x < c$	$(-c, c)$	
$\|x\| \leq c$	$-c \leq x \leq c$	$[-c, c]$	
$\|x\| > c$	$x < -c \ o \ x > c$	$(-\infty, -c) \cup (c, \infty)$	
$\|x\| \geq c$	$x \geq c \ \ o \ \ x \leq -c$	$(-\infty, -c] \cup [c, \infty)$	

DISTANCIA ENTRE LOS EXTREMOS a Y b DEL INTERVALO

La distancia entre los extremos de un intervalo se puede calcular, aplicando la siguiente fórmula.

$d(a, b) = |b - a| = |a - b|$ para cualquier intervalo con $a, b \in$ IR

Ejemplo: Dado el intervalo $[-2,5]$



$$d(a, b) = |5 - (-2)| = 7$$

$$d(a, b) = |-2 - 5| = 7$$

Observación: la distancia hubiese sido la misma para los siguientes intervalos: $(-2,5]$; $[-2,5)$; $(-2,5)$.

POTENCIACIÓN

Si a es un número real cualquiera y n es un entero positivo, entonces la potencia n-ésima de a es

$$a^n = a.\underbrace{a.a.a.a\ldots.a}_{n\text{-factores}}$$

El número ***a*** *se denomina base y* ***n*** *es el exponente*

Exponentes cero y negativo:

Si $a \neq 0$ es un número real y *n* es un entero positivo, entonces

$$a^0 = 1 \quad \text{y } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Propiedades de la Potenciación

PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN		
PROPIEDAD	**EJEMPLO**	**DESCRIPCIÓN**
$\boldsymbol{a^m a^n = a^{m+n}}$	$3^4 3^5 = a^{4+5} = 3^9$	Para multiplicar dos potencias de la misma base, se suman los exponentes
$\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$	$\frac{3^4}{3^5} = a^{4-5} = 3^{-1}$	Para dividir dos potencias de la misma base, se restan los exponentes
$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$	$(4^2)^3 = 4^{2.3} = 4^6$	Para elevar una potencia de una nueva potencia, se multiplican los exponentes
$\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$	$(3.4)^5 = 3^5 4^5$	La potenciación es distributiva con respecto al producto
$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2}$	La potenciación es distributiva con respecto al cociente
$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$	Para elevar una base a un exponente negativo, se invierte la base y se cambia el signo del exponente
$\boldsymbol{\frac{b^m}{a^n} = \frac{a^{-n}}{b^{-m}}}$	$\frac{2^4}{3^3} = \frac{3^{-3}}{2^{-4}}$	Para invertir una fracción, se cambia el signo de los exponentes

Actividad Nº 6

Completa sobre la línea de puntos y busca un ejemplo de cada caso.

a) La potencia $-n$ de una fracción distinta de cero es igual a la potencia de exponente n del ……………………. de dicha fracción. En símbolos: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ con $n \in \mathbb{N}$ y $a \neq 0$

b) La expresión $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \left(\frac{c}{d}\right)^n$ nos indica que la potenciación es distributiva respecto de …………………….

c) La expresión $\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n$ nos indica que la potenciación es distributiva respecto de …………………….

d) En el producto de potencias de igual base se ……………………… los exponentes.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$$

e) En el cociente de potencias de igual base se ……………..………. los exponentes.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$$

f) En la potencia de otra potencia, se ………..…………. los exponentes.

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m\,n}$$

g) La potenciación ………….. distributiva respecto de la suma ni de la ……..……….

h) La potencia $\frac{m}{n}$ de un número real se obtiene calculando la potencia *emésima* de la raíz *enésima* del número dado. Es decir:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

i) Para hallar la raíz de índice n de una fracción se halla la raíz del ………………… y del …………………..

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Los científicos utilizan la notación exponencial para compactar la escritura de números muy grandes o muy pequeños.

Por ejemplo, la estrella más cercana más allá del Sol, Alfa Centauro, se encuentra aproximadamente a 40 000 000 000 000km. Por otro lado, la masa de un átomo de hidrógeno es de casi 0,00000000000000000000000166g. Estos números son difíciles de leer y de escribir, de modo que los científicos los expresan casi siempre en notación científica.

Notación científica

Se dice que un número positivo x está escrito en notación científica si está expresado como sigue:

$$x = a.10^n \;\; donde\; 1 \; \leq a < 10 \; y\; n\; es\; un\; entero$$

Por ejemplo, cuando establecemos que la distancia a la estrella Alfa Centauro es $4x10^{13}$ km, el exponente positivo 13 indica que el punto decimal se debe desplazar 13 lugares a la derecha:

$$4x10^{13} = 40\,000\,000\,000\,000$$

RADICACIÓN

Si n es un entero positivo, entonces la raíz n-ésima de a se define como sigue:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Si n es par, $a \; \geq 0$ y $b \; \geq 0$

Propiedades de la Radicación

PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN		
PROPIEDAD	**EJEMPLO**	**DESCRIPCIÓN**
$\sqrt[n]{\boldsymbol{a.b}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}$	$\sqrt[4]{16.81} = \sqrt[4]{16}\sqrt[4]{81}$	La radicación es distributiva con respecto al producto
$\sqrt[n]{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}} = \frac{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}}$	$\sqrt[2]{\frac{16}{100}} = \frac{\sqrt[2]{16}}{\sqrt[2]{100}}$	La radicación es distributiva con respecto al cociente
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}} = \sqrt[m.n]{\boldsymbol{a}}$	$\sqrt[5]{\sqrt[3]{256}} = \sqrt[15]{256}$	Para resolver una raíz de otra raíz, se multiplican los índices
$\sqrt[n]{(\boldsymbol{a})^{\boldsymbol{n}}} = \boldsymbol{a}$, si $\boldsymbol{n}$ es impar	$\sqrt[5]{(3)^5} = 3$	
$\sqrt[n]{(\boldsymbol{a})^{\boldsymbol{n}}} = \lvert\boldsymbol{a}\rvert$, si $\boldsymbol{n}$ es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} = \lvert-3\rvert$	

Exponente fraccionario

Para cualquier exponente racional m/n de los términos más bajos, donde m y n son enteros y $n > 0$, se define:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

o en forma equivalente $$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Si n es par, entonces es necesario que $a \geq 0$.

Actividad Nº 7

Considerando $x \neq 0$**,** determina la veracidad de las siguientes proposiciones encerrando en un círculo la opción correcta.

a) $x^0 = 0$	V - F
b) $x^0 = 1$	V - F
c) $x^1 = x$	V - F
d) $x^1 = 1$	V - F
e) $\sqrt[p]{x^q} = x^{\frac{p}{q}}$	V - F
f) $(x^p)^q = x^{p\,q}$	V - F

g) $x^p x^q = x^{p+q}$	V - F
h) $\frac{x^p}{x^q} = x^{p/q}$	V - F
i) $\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$	V - F
j) $\sqrt{2+5} = \sqrt{2} + \sqrt{5}$	V - F
k) $\sqrt{2\,a} = \sqrt{2}\sqrt{a}$	V - F
l) $(x+2)^3 = x^3 + 2^3$	V - F

RAZONES Y PROPORCIONES

Tanto en la vida diaria como en las transacciones comerciales es necesario comparar precios, tamaños, etc., ya que algunos enunciados que involucran números tienen poco significado si no se comparan con otros o con otras cantidades.

Analicemos la siguiente situación:

En un curso existe un total de 42 alumnos, de los cuales 10 son mujeres. Podemos comparar estas cantidades de personas de diversas formas:

- De un total de 42 alumnos, 10 son mujeres.
- De un total de 42 alumnos, 32 son hombres.
- Existe una diferencia de 22 personas entre las cantidades de hombres y mujeres, a favor de los hombres.
- Por cada 5 mujeres hay 16 hombres en el curso.
- El cociente entre la cantidad de mujeres y la de hombres es 10/32.
- Por cada hombre hay 0,3125 mujeres.

Ahora ustedes completen:

- El cociente entre la cantidad de hombres y mujeres es ………………….
- Por cada 16 hombres hay …………………. mujeres en el curso.
- Por cada mujer hay …………………. hombres.

Podemos decir entonces que una *RAZÓN* es una comparación entre dos cantidades de la misma especie y puede ser:

***ARITMÉTICA**:* cuando es la diferencia entre dos cantidades de la misma especie, con el fin de precisar cuánto excede una de la otra. Llamando R_a a la razón aritmética, la comparación de dos cantidades a y b, se escribe: $R_a = a - b$; o bien $R_a = b - a$.

GEOMÉTRICA: es el cociente entre dos cantidades de la misma especie, con el fin de establecer las veces que una contiene a la otra. Entonces, llamando R_g a la razón geométrica, se escribe: $R_g = \frac{a}{b}$; o bien $R_g = \frac{b}{a}$, siempre que los denominadores sean distintos de cero.

Ejemplo: Comparar los números 18 y 6

Razón Aritmética: $18 - 6 = 12$, 18 supera a 6 en 12 unidades, por lo que su razón aritmética es 12; también podemos escribir $6 - 18 = -12$, 6 supera a 18 en -12 unidades, por lo que su razón aritmética es -12, dependiendo de la situación abordada.

Razón Geométrica: $\frac{18}{6} = 3$, 18 contiene tres veces a 6, por lo tanto su razón geométrica es 3, o $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.

Nota: En nuestro curso, cuando hacemos referencia a la razón entre dos cantidades, interpretamos que debemos calcular la razón geométrica, a menos que se indique que debemos calcular la razón aritmética.

La razón se puede leer de distintas formas. En el ejemplo anterior, al comparar 18 y 6, podemos expresar 18 es a 6, o $18:6$. El *numerador* de la razón se llama *antecedente* y el *denominador* recibe el nombre de *consecuente.*

Un poco de historia…

Muchos historiadores concuerdan en que el primer matemático fue el griego Thales de Mileto. Se cuenta que, en las tierras del Nilo, los sacerdotes egipcios, poniéndolo a prueba, le preguntaron en cuánto estimaba la altura de la gran pirámide de Keops. Con la serenidad de un sabio, Thales respondió que, antes que estimarla, prefería medirla. Los egipcios, estupefactos, presenciaron la simple y maravillosa medición de Thales, quien, mediante un bastón y una ***proporción****, logró rápidamente la proeza*.

Establecimos ya, el concepto de razón entre dos números o magnitudes, definamos ahora proporción.

Una proporción está formada por los números a, b, c y d, si la razón entre a y b es la misma que entre c y d.

Es decir que una proporción está formada por dos razones iguales: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Donde a, b, c y d son distintos de cero y la proporción se lee "a es a b como c es a d".

En esta expresión a y d se denominan *extremos* mientras que b y c son los *medios.*

Ejemplo:

Los números 2, 5, 8 y 20 forman una proporción, tomados en ese orden, si la razón entre 2 y 5 es la misma que la razón entre 8 y 20. Es decir:

$$\frac{2}{5}=\frac{8}{20}$$

Además, si obtenemos el producto de los extremos de esa proporción (2 multiplicado por 20), resulta igual al producto de los medios (5 multiplicado por 8), por lo tanto podemos enunciar la *propiedad fundamental de las proporciones* que establece:

En toda proporción, el producto de los extremos es igual al de los medios.

El uso de esta propiedad nos permite encontrar un extremo o un medio desconocido, de una proporción. Por ejemplo en la expresión $\frac{12}{28}=\frac{x}{14}$, el valor de x se obtiene multiplicando los extremos y dividiéndolos por el medio conocido:

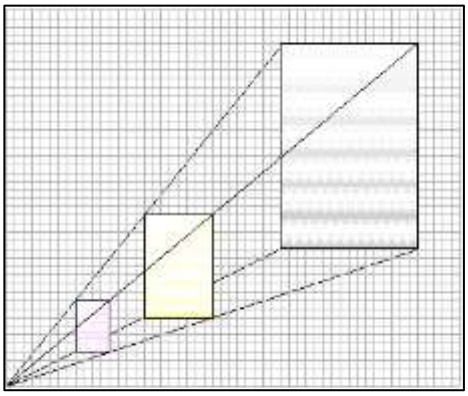
$$x=\frac{12\cdot 14}{28}\rightarrow x=6$$

Analicemos ahora algunas situaciones de la vida diaria.

Ejemplo 1: En la siguiente tabla se relaciona la superficie de una cerca a pintar y los litros de la pintura empleada.

m^2 de cerca a pintar	1	1,5	2	4
Litros de pintura empleados	0,25	0,375	0,50	1

Ejemplo 2: Observa el dibujo y construye una tabla que relacione la longitud de la base de cada rectángulo con la longitud de su altura.



Ejemplo 3: El precio de un estacionamiento es:

Tiempo	Precio
hasta 1 hora	10 $
hasta 2 horas	20 $
....	....

En todos estos ejemplos existe una relación entre dos magnitudes. Además, cuando una varía, provoca que varíe la otra. Podemos precisar aún más, analizando cada ejemplo en particular.

En el ejemplo 1:

- Al doble de m^2 de cerca corresponde el __________ de cantidad de litros de pintura.
- Al triple de m^2 de cerca corresponde el __________ de cantidad de litros de pintura.
- A la mitad de m^2 de cerca corresponde la ________ de cantidad de litros de pintura.

Y escribimos $\frac{1}{0,25} = \frac{1,5}{0,375} = \frac{2}{0,50} = \frac{4}{1} = \cdots$. Por lo tanto la razón entre la cantidad de m^2 a pintar y la cantidad de litros de pintura empleados resulta constante e igual a cuatro.

Es importante aquí destacar que cada *razón* indica los m^2 de cerca a pintar con respecto a los litros de pintura empleados para ello. Y cuatro de esos números considerados en orden forman una proporción: $\frac{1}{0,25} = \frac{1,5}{0,375}$; $\frac{1,5}{0,375} = \frac{2}{0,50}$; $\frac{2}{0,50} = \frac{4}{1}$; $\cdots$.

Puesto que la razón entre los dos primeros es igual a la razón entre los dos segundos, en cada una de las igualdades consideradas. Esta razón recibe el nombre de *constante de proporcionalidad.*

Si escribimos las razones de la siguiente manera: $\frac{0,25}{1} = \frac{0,375}{1,5} = \frac{0,50}{2} = \frac{1}{4} = \cdots$ ¿Cuál es la razón ahora? En el contexto de la situación planteada ¿qué expresa cada razón?

Para el caso del ejemplo 2, te propongo que encuentres la razón de proporcionalidad entre las longitudes de la base y la altura, y escribas algunas proporciones que surgen del ejemplo.

Cuando utilizamos este tipo de expresiones:

al doble .... doble,

a la mitad............. mitad,

al triple .... triple,

a un tercio.............. un tercio, etc.,

decimos que *las dos magnitudes son directamente proporcionales,* y expresamos:

"La superficie de cerca a pintar es directamente proporcional al volumen de litros de pintura".

"Las longitudes de las bases son directamente proporcionales a las longitudes de las alturas".

En el ejemplo 3 es conveniente observar que si sólo tomamos valores enteros puede parecer que existe proporcionalidad, pero no es así. Si realizamos la tabla considerando fracciones de tiempo, ya que hasta 1 hora la tarifa es de $10, podemos construir la siguiente tabla:

Tiempo	**Precio**
30 minutos	$\$10$
45 minutos	$\$10$
60 minutos	$\$10$
70 minutos	$\$20$
140 minutos	$\$30$

En este caso diremos que el precio del estacionamiento **NO** es directamente proporcional al tiempo.

Analicemos ahora las siguientes situaciones.

Ejemplo 4: En 50 litros de agua de mar hay 1300 gramos de sal. ¿Cuántos litros de agua de mar contendrán 5200 gramos de sal?

Como en doble cantidad de agua de mar habrá doble cantidad de sal; en el triple, el triple, etc., las magnitudes cantidad de agua y cantidad de sal son directamente proporcionales.

Formemos la siguiente tabla, llamando x a nuestra incógnita:

Litros de agua	**Gramos de sal**
50	1300
x	5200

Se verifica la proporción $\frac{50}{1300} = \frac{x}{5200}$, por lo tanto $50 \cdot 5200 = x \cdot 1300$, de donde:

$$x = \frac{50 \cdot 5200}{1300} \rightarrow x = 200$$

Es decir que en 200 litros de agua de mar hay 5200 gramos de sal.

Ejemplo 5: Un vehículo tarda en realizar un trayecto 6 horas si su velocidad es de $60\ km/h$, pero si doblamos la velocidad el tiempo disminuirá a la mitad. Es decir, si la velocidad es de $120\ km/h$ el tiempo del trayecto será de 3 horas.

Velocidad en km/h	**Tiempo en h**
60	6
120	3
	12
90	

¿Te animas a completar el cuadro?

En este caso, las magnitudes *no son directamente proporcionales*, por lo tanto, no podemos plantear las razones como en el caso anterior, pero lo que sí se mantiene constante es el producto entre los elementos de cada fila del cuadro, es decir:

$$60 \cdot 6 = 120 \cdot 3 = \cdots 12 = 90\ \cdots$$

Decimos que las magnitudes son inversamente proporcionales ya que cuando, al multiplicar o dividir una de ellas por un número cualquiera, la otra queda dividida o multiplicada por el mismo número.

Son magnitudes inversamente proporcionales la velocidad y el tiempo. Se establece una relación de proporcionalidad inversa entre estas dos magnitudes puesto que:

- Si la velocidad aumenta al doble, el tiempo disminuye a la mitad.
- Si la velocidad disminuye en un tercio, el tiempo aumenta el triple.

Velocidad en km/h	**Tiempo en h**
60	6
120	3
	12
90	

¿Has interpretado los enunciados propuestos? Te propongo la siguiente actividad para que evalúes la comprensión sobre este tema, si dudas, relee de nuevo el desarrollo.

Actividad Nº 9

a. Un automóvil gasta 5 litros de gasoil cada $100\ km$. Si quedan en el depósito 6 litros, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer el automóvil?

Gasoil en l	**Recorrido en km**

b. Si 3 hombres necesitan 24 días para hacer un trabajo, ¿cuántos días emplearán 18 hombres para realizar el mismo trabajo?

Número de hombres	Días de trabajo

PORCENTAJE

El porcentaje es una de las expresiones matemáticas que más usamos en la vida cotidiana. La información que aparece en los medios de comunicación está repleta de datos expresados en porcentajes. Por ejemplo, ¿quién no ha oído decir alguna vez?: "Rebajas del 10% en todos los artículos del hogar"; "El aumento en el precio del combustible rondaría el 15%".

Un porcentaje es la proporción de una cantidad respecto a otra y representa el número de partes que nos interesan de un total de 100.

Cuando una familia invierte el 45% de sus ahorros en comprar una vivienda, se está gastando en ella 45 pesos de cada 100 que ha ahorrado.

Se puede definir el **tanto por ciento** como una fracción que tiene denominador 100. En este caso, el 45% es la fracción decimal.

$$45\% = \frac{45}{100} = 0{,}45$$

Como el porcentaje es una fracción decimal, se puede expresar también en número decimal.

Cualquier porcentaje se puede expresar en forma de fracción o número decimal y, a su vez, cualquier número decimal o fracción se puede expresar en porcentaje. Observemos con atención el siguiente cuadro

Porcentaje	Se lee	Fracción	Decimal	Significado
$\mathbf{10\%}$	Diez por ciento	$\frac{10}{100}$	$0{,}1$	**10 de cada 100**
$\mathbf{30\%}$	Treinta por ciento	$\frac{30}{100}$	$0{,}3$	**30 de cada 100**
$\mathbf{3\%}$	Tres por ciento	$\mathbf{\frac{3}{100}}$	$\mathbf{0{,}03}$	**3 de cada 100**

El porcentaje o tanto por ciento ($\%$), es una de las aplicaciones más usadas de las *razones y proporciones.* Es una forma de comparar cantidades, una unidad de referencia que relaciona una magnitud (una cifra o cantidad) con el todo que le corresponde (el todo es siempre el 100).

¿Qué significa $50\ \%$?: Significa que de una cantidad que se ha dividido en cien partes se han tomado 50 de ellas, o sea, la mitad.

¿Qué significa 25%?: Significa que de un total de cien partes se han tomado veinticinco, o sea $\frac{1}{4}$ $\left(\frac{25}{100}\right.$ al simplificar por 5, se reduce a $\left.\frac{1}{4}\right)$.

Cálculo de Porcentaje

El Porcentaje o Tanto por ciento se calcula a partir de variables directamente proporcionales. En el cálculo intervienen cuatro componentes:

Cantidad Total	----	100%
Cantidad Parcial	----	Porcentaje Parcial

Ejemplo:

(Cantidad total) $\$1\,000$ - equivale al - 100 % (porcentaje total)

(Cantidad parcial) $\$500$ - equivale al - 50 % (porcentaje parcial)

Existen tres situaciones o tipos de problemas que pueden plantearse. Éstos son:

1.- Dada una cantidad total, calcular el número que corresponde a ese porcentaje parcial.

Ejemplo: ¿Cuál (cuánto) es el 20% de 80?

	Cantidad	**Porcentaje**
Total	80	100
Parcial	$\boldsymbol{x}$	20

Armando la proporción que se verifica entre las cantidades:

$$\frac{80}{x} = \frac{100}{20}\text{, y resolviendo } x = \frac{80\cdot 20}{100} = 16$$

Respuesta: el 20% de 80 es 16.

2.- Calcular el total, dada una cantidad que corresponde a un porcentaje de él.

Ejemplo: Si el 20% de una cierta cantidad total es 120 ¿Cuál es el total?

	Cantidad	Porcentaje
Total	$\boldsymbol{x}$	100
Parcial	120	20

Procediendo de igual manera que en el ejemplo anterior:

$$\frac{x}{120} = \frac{100}{20}\text{, y resolviendo } x = \frac{120\ 100}{20} = 600$$

Respuesta: 120 es el 20% de un total de 600.

3.- Dado el total y una parte de él calcular que porcentaje es esa parte del total.

Ejemplo: ¿Qué porcentaje es 40 de 120?

	Cantidad	Porcentaje
Total	120	100
Parcial	40	$\boldsymbol{x}$

Te propongo que trabajes con las cantidades que aparecen en el cuadro y concluyas con la respuesta que te propongo a continuación.

***Respuesta:* $\mathbf{40}$ *es el* $\mathbf{33,33}$ % *de un total de* $\mathbf{120}$.**

Como se ha visto, el tanto por ciento representa una cierta cantidad con respecto a cien. Si en lugar de tomar como referencia cien, se toma la unidad, se llama *tanto por uno.*

- Si 8 kilos de manzanas valen $\$120$, ¿cuánto vale un kilo?

  1 kilo de manzanas cuesta $120/8 = \$15$ (15 es el tanto por uno, puesto que expresa, para este caso, el precio por cada kilo de manzana)

- Si 500 ruedas de metal pesan 3000 kilos, ¿cuántos kilos pesa cada rueda?

  Razonando de modo similar al anterior, calcula el tanto por uno de las cantidades dadas y expresa su significado

Para realizar operaciones, es más práctico y rápido utilizar el tanto por uno correspondiente en lugar del tanto por ciento.

También suele calcularse el tanto por mil. La expresión de un número por mil es una manera de expresarlo como una fracción de mil. Se escribe con el signo ‰, símbolo similar al signo del porcentaje con un cero al final.

Un uno por mil se define como: $\mathbf{1‰ = 10 - 3 = 1/1000}$

A continuación, citamos algunos ejemplos donde el uso de números expresados al por mil es común:

- Tasas de natalidad y de mortalidad. Si en el año x la tasa de natalidad fue del $12‰$, significa que del 1 de enero del año x al 1 de enero del año $x + 1$ por cada mil habitantes, nacieron doce niños.
- Salinidad marina. Por ejemplo: "la salinidad media es del $35‰$". Indica que en el mar hay treinta y cinco gramos de sal por cada mil litros de agua.

REPARTICIÓN PROPORCIONAL

El reparto proporcional es una operación que consiste en dividir una cantidad en partes proporcionales a otras cantidades dadas. Es la distribución equitativa de una cifra, en proporción directa o inversa, entre ciertos números denominados índices del reparto. En este curso abordaremos exclusivamente la repartición proporcional directa.

En los problemas del reparto proporcional se consideran tres elementos: cantidad a repartir, índices del reparto y cociente del reparto. La aplicación del reparto proporcional es muy variada, se aplica en gran escala en empresas comerciales, pero fundamentalmente en la aplicación o prorrateo de gastos en la contabilidad de costos.

Resolvamos una situación práctica, que nos facilitará la comprensión y nos ayudará a establecer la correspondencia con los temas tratados hasta aquí.

Ejemplo: El señor Pérez dejó una herencia de 360.000 $ para sus hijos, pero estableció la condición que el reparto se hiciera proporcionalmente a las cantidades 9, 6, 5, que son las edades de sus hijos ¿Qué cantidad le corresponde a cada uno?

Si partimos de las edades de los hijos, podemos hacer un reparto proporcional directo basándonos en las edades. En este tipo de reparto, las partes que se buscan son directamente proporcionales a los números dados.

	Hijo A	Hijo B	Hijo C	Total
Edades	9	6	5	20
Herencia	x	y	Z	360000

Cantidad a repartir: 360000 ($)

Índices del reparto: 9, 6, 5, 20 (años)

Cociente del reparto: 360000/20 ($ por año)

Para poder completar la tabla, o sea sustituir esas letras por sus respectivos valores, podemos considerar el caso de cada hijo por separado.

Tenemos una variación directamente proporcional, puesto que la repartición del dinero se realiza de acuerdo a la edad, a mayor edad más dinero. Es decir, se están relacionando cuatro cantidades que son proporcionales. Conocemos tres de ellas y debemos encontrar el valor de la cuarta. De acuerdo a lo actuado hasta aquí, consideramos:

$$\frac{9}{x} = \frac{20}{360\,000}, \text{ resolviendo } x = \frac{9 \cdot 360\,000}{20} = 162\,000$$

Procediendo de la misma manera, obtenemos $y = 108\,000$ y $z = 90\,000$

Nuestra respuesta es: *El hijo A (el mayor) recibió* $\$162\,000$*; el hijo B (el del medio) recibió* $\$108\,000$ *y el hijo C (el menor) recibió* $\$90\,000$.

Podemos verificar que la suma recibida por los hijos completa el total de la herencia:

$$162000 + 108000 + 90000 = 360000$$

También podemos hacer un reparto proporcional inverso, pensando que al menor le debe tocar más, por ser menor y tener esa desventaja.

En el reparto proporcional inverso, las partes que se buscan son inversamente proporcionales a los números dados.

Si la repartición es inversa, consideramos:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{10}{90} + \frac{15}{90} + \frac{18}{90} = \frac{43}{90}$$

	Hijo A	Hijo B	Hijo C	Total
Edades	$\frac{10}{90}$	$\frac{15}{90}$	$\frac{18}{90}$	$\frac{43}{90}$
Herencia	x	y	z	360000

Resolviendo ahora como en la situación anterior:

- $\frac{\frac{10}{90}}{x} = \frac{\frac{43}{90}}{360\,000} \rightarrow x = \frac{10 \cdot 360\,000}{43} = 83720{,}90$

- $\frac{\frac{15}{90}}{y} = \frac{\frac{43}{90}}{360\,000} \rightarrow y = \frac{15 \cdot 360\,000}{43} = 125581{,}40$
- $\frac{\frac{18}{90}}{z} = \frac{\frac{43}{90}}{360\,000} \rightarrow x = \frac{18 \cdot 360\,000}{43} = 150697{,}70$

Nuestra respuesta ahora es: El hijo A (el mayor) recibió \$83720,90; el hijo B (el del medio) recibió \$125581,40 y el hijo C (el menor) recibió \$150697,70.

Podemos verificar que la suma recibida por los hijos completa el total de la herencia:

$$83720{,}90 \;+\; 125581{,}40 \;+\; 150697{,}70 \;=\; 360000$$

Las situaciones más comunes que se presentan, responden a repartición directamente proporcional, por eso generalmente cuando se habla de repartición proporcional, se entiende que las cantidades son directamente proporcionales.

Te propongo ahora que trabajes con las siguientes situaciones.

Actividad Nº 10

En un establecimiento de nivel medio han destinado la franja posterior del terreno para hacer una huerta que tendrá 90 m de largo. Deciden repartir la huerta, a lo largo, en tres franjas proporcionales al número de grupos por año escolar, para que cada grupo sea responsable de sus parcelas.

a) Completa la siguiente tabla.

Grado	1º	2º	3º	Total
Grupos	6	5	4	15
Longitud de la parcela				90

b) Determina la constante de proporcionalidad.

c) Halla las longitudes de las parcelas.

d) Verifica el resultado obtenido.

Actividad Nº 11

Juan, Pedro y Camilo aceptaron un trabajo y decidieron que cada uno cobraría de acuerdo con las horas trabajadas. Cuando terminaron, habían anotado:

Juan: 20 horas

Pedro: 12 horas

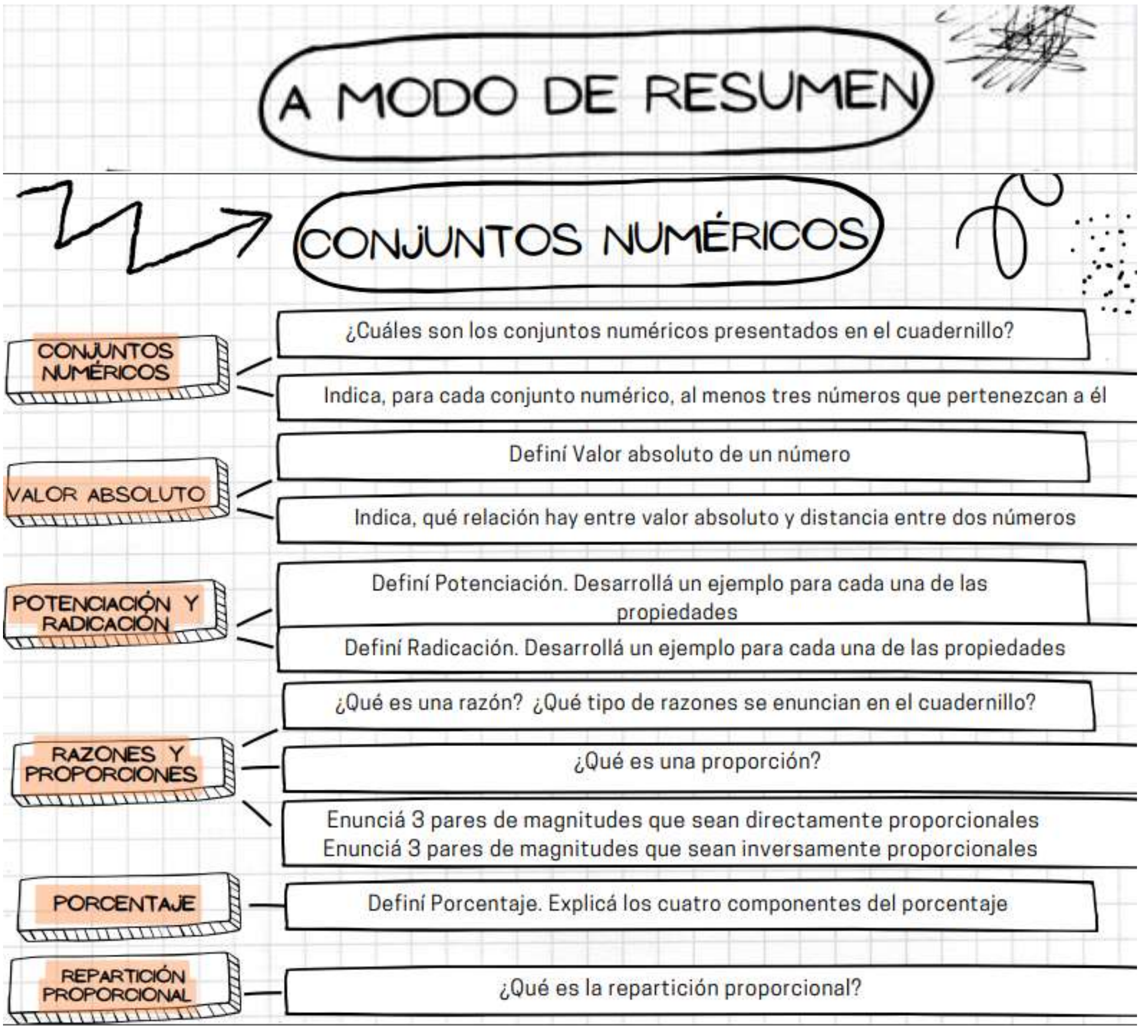
Camilo: 8 horas

Cuando recibieron \$800 como pago total debían hacer una repartición proporcional, de manera que cada uno recibiera una cantidad conforme al tiempo trabajado.

Considerando que les habían pagado \$800 por un total de cuarenta horas, elaboraron la siguiente tabla:

	Camilo	Pedro	Juan	Total
Horas Trabajadas	8	12	20	40
Pago en $	***c***	***p***	***j***	800

Determina el dinero que recibió cada uno de los trabajadores



ECUACIONES

ECUACIONES

Una ecuación es un enunciado en el que se establece que las expresiones matemáticas son iguales.

Por ejemplo,

$$3 + 5 = 8$$

es una ecuación. La mayor parte de las ecuaciones que se estudian en el álgebra contiene variables, las cuales son símbolos, casi siempre letras que representan números. En la ecuación:

$$4x + 7 = 19$$

la letra x es la variable. Consideramos que x es la "incógnita" de la ecuación, por lo que el objetivo es determinar el valor de x que hace que la ecuación sea cierta.

Los valores de la incógnita que hacen que la ecuación sea verdadera se llaman **soluciones** o **raíces** de la ecuación, y el proceso para determinar las soluciones se llama **resolución de una ecuación**.

Dos ecuaciones con exactamente las mismas soluciones se llaman **ecuaciones equivalentes**. Para resolver una ecuación, tratamos de encontrar una ecuación más simple y equivalente en la que la variable esté sola en un lado del signo de "igual".

A continuación se muestran las propiedades que aplicamos para resolver una ecuación (En estas propiedades, *A*, *B* y *C* representan expresiones algebraicas y el símbolo ⟺ significa "equivale a")

Propiedades de la igualdad	Descripción
$\boldsymbol{A = B \iff A + C = B + C}$	Al sumar la misma cantidad a ambos miembros de una ecuación se obtiene una ecuación equivalente
$\boldsymbol{A = B \iff CA = CB}$ **con** $\boldsymbol{C \neq 0}$	Al multiplicar ambos miembros de una ecuación por la misma cantidad se obtiene una ecuación equivalente, siempre que esa cantidad sea distinta de cero
$\boldsymbol{A = B}$ **y** $\boldsymbol{C \neq 0 \iff \frac{A}{C} = \frac{B}{C}}$	Al dividir ambos miembros de una ecuación por la misma cantidad se obtiene una ecuación equivalente, siempre que esa cantidad sea distinta de cero
$\boldsymbol{Si\ A\,B = 0 \Rightarrow A = 0\ o\ B = 0}$	Si el producto entre dos cantidades es igual a cero, entonces al menos una de las cantidades es cero

Ecuaciones lineales o de primer grado:

Una ecuación lineal de una variable es una ecuación equivalente a una de la forma

$$ax + b = 0$$

donde a y b son números reales y x es la variable.

Solución de una ecuación lineal o de primer grado:

Resolvemos la ecuación cambiándola a una equivalente en la que todos los términos que tienen la variable *x* están en un lado y todos los términos constantes están en el otro

Dada la ecuación $7y - 4 = 3y + 8$

$7y - 4 = 3y + 8$	Ecuación dada
$7y - 4 + 4 = 3y + 8 + 4$	Se suma 4 a ambos miembros
$7y = 3y + 12$	Se opera
$7y - 3y = 3y - 3y + 12$	Se resta $3y$ a ambos miembros
$4y = 12$	Se opera
$4y\frac{1}{4} = 12.\frac{1}{4}$	Se multiplica por $\frac{1}{4}$
$1y = 3$	Posible solución de la ecuación

Una vez hallado el o los posibles valores de la incognita es preciso verificar si la respuesta encontrada es correcta

Verificamos a continuación si $y = 3$, es o no solución de la ecuación $7y - 4 = 3y + 8$, para ello, en la ecuación reemplazamos $y = 3$:

$$7y - 4 \stackrel{?}{=} 3y + 8$$

$$7.3 - 4 \stackrel{?}{=} 3.3 + 8$$

$$21 - 4 \stackrel{?}{=} 9 + 8$$

$$17 = 17$$

Al llegar a una igualdad, podemos asegurar que $y = 3$, es solución de la ecuación $7y - 4 = 3y + 8$

Observa que en los tres primeros pasos, aun no sabemos si el valor hallado es o no solución de la ecuación, por lo cual no podemos asegurar la igualdad de ambos miembros. Por lo tanto, no es correcto colocar el signo (=), y puede colocársele un (?) en la parte superior, hasta que se confirme o no la igualdad.

Veamos otro ejemplo: $5(x-3)=\frac{3}{2}(x+1)$

$5(x-3)=\dfrac{3}{2}(x+1)$	Ecuación dada
$5(x-3).2=\dfrac{3}{2}(x+1).2$	Multiplicamos por 2 ambos miembros
$10(x-3)=3(x+1)$	Se opera
$10x-30=3x+3$	Se aplica distributiva
$10x-30-3x=3x+3-3x$	Se resta 3x a ambos miembros
$7x-30=3$	Se opera
$7x-30+30=3+30$	Se suma 30 a ambos miembros
$7x=33$	Se opera
$7x\dfrac{1}{7}=33\dfrac{1}{7}$	Se multiplica por $\frac{1}{7}$
$x=\dfrac{33}{7}$	Posible solución de la ecuación

Verificación:

$$5\left(\frac{33}{7}-3\right)\overset{?}{=}\frac{3}{2}\left(\frac{33}{7}+1\right)$$

$$5\left(\frac{33}{7}-3\right)\overset{?}{=}\frac{3}{2}\left(\frac{33}{7}+1\right)$$

$$5\left(\frac{12}{7}\right)\overset{?}{=}\frac{3}{2}\left(\frac{40}{7}\right)$$

$$\frac{60}{7}=\frac{60}{7}$$

Al llegar a una igualdad, podemos asegurar que $x=\frac{33}{7}$ es solución de la ecuación $5(x-3)=\frac{3}{2}(x+1)$

ECUACIONES CUADRÁTICAS O DE SEGUNDO GRADO:

Una ecuación cuadrática es una ecuación de la forma:

$$ax^2+bx+c=0$$

donde *a, b y c* son números reales con $a\neq 0$

Solución de una ecuación cuadrática o de segundo grado:

Algunas ecuaciones cuadráticas se pueden resolver mediante factorización y usando propiedades de los números reales, otras se pueden resolver simplemente despejando, etc.

Pero, en definitiva, todas las ecuaciones cuadráticas pueden resolverse con la denominada *formula resolvente.*

En conclusión, dada la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Las soluciones de la misma, son los números que resultan de calcular:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dada la ecuación $3z^2 - 5z = 1$

$3z^2 - 5z = 1$	Ecuación dada
$3z^2 - 5z - 1 = 0$	Se trabaja algebraicamente, para igualarla a cero,
$a = 3, b = -5\ y\ c = -1$	Se identifica el valor de a, b y c
$z_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.3.(-1)}}{2.3}$	Se aplica la Fórmula resolvente
$z_1 = 1{,}84;\ z_2 = -0{,}1805$	Posibles soluciones de la ecuación

Aquí corresponde hacer dos verificaciones, una para $z_1 = 1{,}84$ y otra para $z_2 = -0{,}1805$

Verificación para $z_1 = 1{,}84$

$$3z^2 - 5z = 1$$

$$3(1{,}84)^2 - 5.1{,}84 \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 = 1$$

Al llegar a una igualdad, podemos asegurar que $z_1 = 1{,}84$ es solución de la ecuación $3z^2 - 5z = 1$

Verificación para $z_2 = -0{,}1805$

$$3z^2 - 5z = 1$$

$$3(-0{,}1805)^2 - 5.0{,}1805 \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 = 1$$

Al llegar a una igualdad, podemos asegurar que $z_2 = -0{,}1805$ es solución de la ecuación $3z^2 - 5z = 1$

Las ecuaciones cuadráticas, pueden tener una solución, dos soluciones o ninguna solución. Dependiendo de los coeficientes de las variables.

El Discriminante de la función cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ es $\Delta = b^2 - 4ac$. Si:

a) Si $\Delta > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
b) Si $\Delta = 0$, entonces la ecuación tiene exactamente una solución real.
c) Si $\Delta < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real

ECUACIONES CON EXPRESIONES FRACCIONARIAS:

Veamos un ejemplo: $\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2} = 2$

Para resolver ecuaciones en las cuales figuran incógnitas tanto en el numerador como en el denominador, se busca eliminar las incógnitas del denominador. Para ello, se calcula el denominador:

$\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2} = 2$	Ecuación dada
$\left(\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2}\right) x(x+2) = 2x(x+2)$	Denominador común es $x(x+2)$. Se multiplica a ambos miembros por el denominador común
$\left(\frac{8x+6}{x(x+2)}\right) x(x+2) = 2x(x+2)$	Se suma $\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2} = \frac{3(x+2)+5x}{x(x+2)} = \frac{3x+6+5x}{x(x+2)} = \frac{8x+6}{x(x+2)}$
$8x + 6 = 2x^2 + 4x$	Se simplifica en el primer miembro. Se aplica distributiva en el segundo miembro
$0 = 2x^2 - 4x - 6$	Puede verse que la ecuación es cuadrática, ya que aparece la variable x elevada al cuadrado. Por lo tanto, para resolverla debe igualarse a cero.
a=2, b=–4 y c=–6	Se identifica el valor de a, b y c
$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.2.(-6)}}{2.2}$	Se aplica la Fórmula resolvente
$x_1 = 3 \quad x_2 = -1$	Posibles soluciones de la ecuación

Aquí corresponde hacer dos verificaciones, una para $x = 3$ y otra para $x = -1$

Verificación para $x_1 = 3$

$$\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2} = 2$$

$$\frac{3}{3} + \frac{5}{3+2} \stackrel{?}{=} 2$$

$$1 + 1 \stackrel{?}{=} 2$$

$$2 = 2$$

Al llegar a una igualdad, podemos asegurar que $x_1 = 3$ es solución de la ecuación $\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2} = 2$

Verificación para $x_2 = -1$

$$\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2} = 2$$

$$\frac{3}{-1} + \frac{5}{-1+2} \stackrel{?}{=} 2$$

$$-3 + 5 \stackrel{?}{=} 2$$

$$2 = 2$$

Al llegar a una igualdad, podemos asegurar que $x_2 = -1$ es solución de la ecuación $\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2} = 2$

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Para poder resolver este tipo de ecuaciones, se debe aplicar la definición de valor absoluto y luego se aplican las propiedades y estrategias para resolver una ecuación, que se presentaron anterior

Veamos un ejemplo: $|2g - 5| = 3$

De acuerdo con la definición de valor absoluto equivale a

$2g - 5 = 3$ o bien a	$2g - 5 = -3$
$2g = 3 + 5$	$2g = -3 + 5$
$2g = 8$	$2g = 2$
$g = 4$	$g = 1$

Verificación para $g = 4$

$$|2g - 5| = 3$$
$$|2.4 - 5| \overset{?}{=} 3$$
$$|3| = 3$$

Al llegarse a una igualdad puede asegurarse que $g = 4$ es solución de la ecuación $|2g - 5| = 3$

Verificación para $g = 1$

$$|2g - 5| = 3$$
$$|2.1 - 5| \overset{?}{=} 3$$
$$|-3| = 3$$

Al llegarse a una igualdad puede asegurarse que $g = 1$ es solución de la ecuación $|2g - 5| = 3$

ECUACIONES QUE INVOLUCRAN UN RADICAL:

Para resolver ecuaciones en las cuales las incógnitas están afectadas por radicales, es conveniente, dejar los radicales en un miembro y el resto de los términos en el otro miembro, para posibilitar el despeje.

Veamos un ejemplo: $7 + \sqrt[3]{5d - 2} = 9$

$7 + \sqrt[3]{5d - 2} = 9$	Ecuación dada
$7 + \sqrt[3]{5d - 2} - 7 = 9 - 7$	Restamos 7 en ambos miembros
$\sqrt[3]{5d - 2} = 2$	Trabajamos algebráicamente
$\left(\sqrt[3]{5d - 2}\right)^3 = 2^3$	Elevamos ambos miembros al cubo
$5d - 2 = 8$	Trabajamos algebráicamente
$5d - 2 + 2 = 8 + 2$	Sumamos a ambos miembros 2
$5d = 10$	Trabajamos algebráicamente
$5d\dfrac{1}{5} = 10.\dfrac{1}{5}$	Multiplicamos a ambos miembros por $\frac{1}{5}$
$d = 2$	Posible solución de la ecuación

Verificación para $d = 2$

$$7 + \sqrt[3]{5d - 2} = 9$$

$$7 + \sqrt[3]{5.2 - 2} \overset{?}{=} 9$$

$$7 + \sqrt[3]{8} \overset{?}{=} 9$$

$$7 + 2 \overset{?}{=} 9$$

$$9 = 9$$

Al llegarse a una igualdad puede asegurarse que $d = 2$ es solución de la ecuación $7 + \sqrt[3]{5d - 2} = 9$.

LOGARITMO

Los logaritmos se atribuyen a John Napier. Él era un terrateniente escocés (no era por lo tanto, un profesional de las matemáticas)

Napier seguramente estudió las sucesiones de las potencias de un número y se percató que los productos y cocientes de dos números de dichas sucesiones son iguales a las potencias de las sumas o diferencias de los exponentes de dichos números ($a^n\ a^m = a^{n+m}$). Pero estas sucesiones no resultaban útiles para el cálculo.

Napier llamó al principio a estos números artificiales, pero más tarde se decidió por la unión de dos palabras griegas logos (razón) y arithmos (número)

Este sistema de cálculo fue aceptado con gran rapidez. Entre los más entusiastas estaba Henry Briggs. Briggs visitó a Napier en 1615 y entre los dos vieron la posibilidad de hacer algunas modificaciones.

Briggs, en vez de tomar un número muy próximo a uno, partió de la igualdad $log\ 10 = 1$ y después fue calculando otros logaritmos tomando raíces sucesivamente (como la raíz cuadrada de 10 es 3,1622, entonces el logaritmo de 3,1622 es 2).

Las bases más utilizadas son 10 y e. Los logaritmos de base 10 se llaman logaritmos decimales y los de base e neperianos o naturales.

Pero ¿para qué sirven los logaritmos? Hace no muchos años, no había ordenadores, ni calculadoras, y por lo tanto multiplicar y dividir (y muchísimo más la potenciación), cuando los números implicados eran grandes, era una tarea ardua (y casi seguro que se cometían errores) Con los logaritmos las multiplicaciones se convierten en sumas, las divisiones en restas y la potenciación en multiplicaciones, con lo que se facilitaban mucho las operaciones. Una vez obtenido el resultado se calculaba el antilogaritmo para obtener el número real.

DEFINICÓN DE LOGARITMO

Dados tres números reales a, b y c; con a positivo y distinto de uno; y b positivo; el logaritmo en base a del número b; se define por:

$$log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Propiedades de los logaritmos

1. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$log_a\,(x\,y) = log_a x + log_a y$$

2. El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base.

$$log_a\,(x^y) = y\,log_a x$$

A partir de estas dos propiedades se pueden deducir las siguientes:

3. El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y$$

4. El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz.

$$log_a \sqrt[y]{x} = log_a\left(x^{\frac{1}{y}}\right) = \frac{1}{y} log_a x = \frac{log_a x}{y}$$

Nota: Recuerde que siempre es posible expresar un radical por medio de una potencia de exponente fraccionario. Es decir: $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$.

5. El logaritmo de la base es siempre 1 ¿Por qué?

$$log_a a = 1$$

6. El logaritmo de 1 es 0 en cualquier base $log_a 1 = 0$ ¿Por qué?

7. $log_a a^x = x \Leftrightarrow a^x = a^x$

8. $a^{log_a x} = x$ ¿por qué?

El logaritmo de base 10 se expresa de la siguiente manera:

$$log_{10} x = \log x$$

El logaritmo de base e se expresa de la siguiente manera:

$$log_e x = \ln x$$

Cambio de base

Para algunos fines, es útil cambiar los logaritmos expresados en una base a otra. Si tenemos $log_a x = y$ deseamos determinar $log_b x = y$, procedemos de la siguiente manera:

$$y = log_b x \Leftrightarrow b^y = x \qquad (1)$$

Aplicando logaritmo en base a, a ambos miembros de la igualdad (1), resulta:

$$log_a b^y = log_a x$$

De acuerdo a la propiedad del logaritmo de una potencia, tenemos:

$$y \, log_a b = log_a x$$

Despejando y, obtenemos:

$$y = \frac{log_a x}{log_a b}$$

Finalmente:

$$\boxed{log_b x = \frac{log_a x}{log_a b}}$$

Ejemplo: Calcular $\boldsymbol{log_2 3}$.

Llamemos $\boldsymbol{x = log_2 3}$, entonces $\boldsymbol{2^x = 3}$. Aplicando logaritmo decimal a ambos miembros obtenemos:

$x \, log \, 2 = log \, 3$; de donde: $x = \frac{log3}{log2} \cong 1{,}5849$ ...

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

ECUACIONES EXPONENCIALES	ECUACIONES LOGARÍTMICAS
El exponente se presenta como variable. Ejemplo: $2^x = 7$ Aplicamos logaritmo en ambos miembros, utilizando las propiedades para bajar el exponente. Despejamos la variable y obtenemos el valor de x. $log \, 2^x = log \, 7$ $x \, log \, 2 = log \, 7$ $x = \frac{log \, 7}{log \, 2}$ $x = \frac{0{,}845}{0{,}30103}$ $x = 2{,}81$	La variable es parte del argumento. Ejemplo: $log_2(x+2) = 5$ Aplicamos la definición de logaritmo, expresando la ecuación en forma exponencial. Despejamos la variable y resolvemos. $log_2(x+2) = 5 \Leftrightarrow x + 2 = 2^5$ $x + 2 = 32$ $x = 32 - 2$ $x = 30$

INECUACIONES

Una inecuación en una variable, representa una desigualdad que involucra dos expresiones, donde al menos una de ellas contiene la variable, separadas por uno de los siguientes símbolos de desigualdad: $>$; $<$; $\geq$; $\leq$.

Resolver una inecuación significa encontrar el conjunto de valores de la variable para los cuales el enunciado es válido. Estos valores son llamados *soluciones de la inecuación.*

Propiedades de las operaciones sobre desigualdades

a) Si $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

b) Si $a \leq b \ y \ c > 0 \Rightarrow a\,c \leq b\,c$

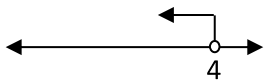
c) Si $a \leq b\, y \ c < 0 \Rightarrow a\,c \geq b\,c$

Por ejemplo, la expresión: $x + 3 < 7$ representa el conjunto de todos los números reales menores que cuatro. Puesto, que si restamos tres a ambos miembros de la desigualdad obtenemos:

$x + 3 - 3 < 7 - 3$ aplicando propiedad cancelativa y resolviendo

$x < 4$ que representa el intervalo $(-\infty, 4)$

Podemos observar que es un intervalo abierto, ya que no toma $-\infty$ a la izquierda (ya vimos que ∞ no es un número real), ni tampoco el número cuatro a la derecha.



Veamos ahora esta otra situación:

$$-3\,z + 3 < 7 + z$$

Procediendo de la misma manera que en el ejemplo anterior, restamos tres a ambos miembros y obtenemos:

$-3z + 3 < 7 + z$	Inecuación dada
$-3z + 3 - 3 < 7 + xz - 3$	Se resta 3 a ambos miembros
$-3z - z < 4 + z - z$	Se resta z a ambos miembros
$-4\,z < 4$	Se divide por –4
$z > 1$	

¿Qué *cambio importante* notas entre el cuarto y quinto paso? *Hemos cambiado el sentido de la desigualdad*, en la tercera expresión es "$-4.z$ *menor* que 4", mientras que en la última es "z *mayor* que 1". Esta es una regla que debes recordar para cuando resuelvas inecuaciones:

- *Multiplicar o dividir ambos miembros de la desigualdad por una expresión positiva, no altera el símbolo de desigualdad.*
- *Multiplicar o dividir ambos miembros de la desigualdad por una expresión negativa, invierte el sentido o dirección del símbolo de desigualdad.*

Resolución de una inecuación que involucra un valor absoluto

A partir del siguiente ejemplo, encontremos el conjunto solución de la desigualdad propuesta.

$$|3y + 6| \leq 9$$

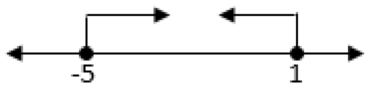
Cuando hicimos la interpretación geométrica del valor absoluto de un número real, vimos que $|3y + 6| \leq 9$ es equivalente a:

$$-9 \leq 3y + 6 \leq 9$$

Nuestro objetivo es ahora, utilizar propiedades que nos permitan encontrar los valores de "y" que hacen verdadera la proposición, por lo tanto, restamos seis a todos los miembros de esa desigualdad y obtenemos:

$-9 \leq 3y + 6 \leq 9$	Inecuación dada
$-9 - 6 \leq 3y + 6 - 6 \leq 9 - 6$	Se resta 6 a cada término
$-15.\frac{1}{3} \leq 3y.\frac{1}{3} \leq 3.\frac{1}{3}$	Se multiplica por $\frac{1}{3}$ cada término
$-5 \leq 1y \leq 1$	Solución de la inecuación

Es decir que el conjunto solución, está formado por todos los números reales comprendidos entre -5 y 1, incluyendo esos extremos ya que el símbolo ≤ incluye la igualdad. Entonces la solución es el intervalo cerrado $[-5,1]$, cuya representación geométrica es:



Si la expresión de la inecuación hubiese sido $|3y + 6| < 9$, el conjunto solución ¿sería el mismo? Vuelve a leer lo que vimos sobre intervalos para contestar, resuelve la expresión y, representa el intervalo sobre la recta numérica para confirmar tu respuesta.

Veamos cómo resolvemos en el caso de que nuestra inecuación sea de la forma:

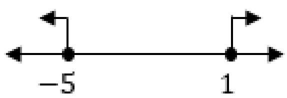
$$|3z + 6| \geq 9$$

Para desbarrar (quitar barras de valor absoluto) escribimos:

$3z + 6 \geq 9$ o bien a	$3z + 6 \leq -9$
$3z \geq 9 - 6$	$3z \leq -9 - 6$
$3z \geq 3$	$3z \leq -15$
$1z \geq 1$	$1z \leq -5$

El resultado, no es un único intervalo sino que representa la unión de dos intervalos semicerrados, uno que contiene todos los reales comprendidos entre 1 (incluido) e infinito, y otro que contiene todos los reales entre menos infinito y -5 (incluido). Simbólicamente lo expresamos con notación de intervalos de la siguiente manera:

$(-\infty, -5] \cup [1, \infty)$ y su representación sobre la recta numérica resulta:

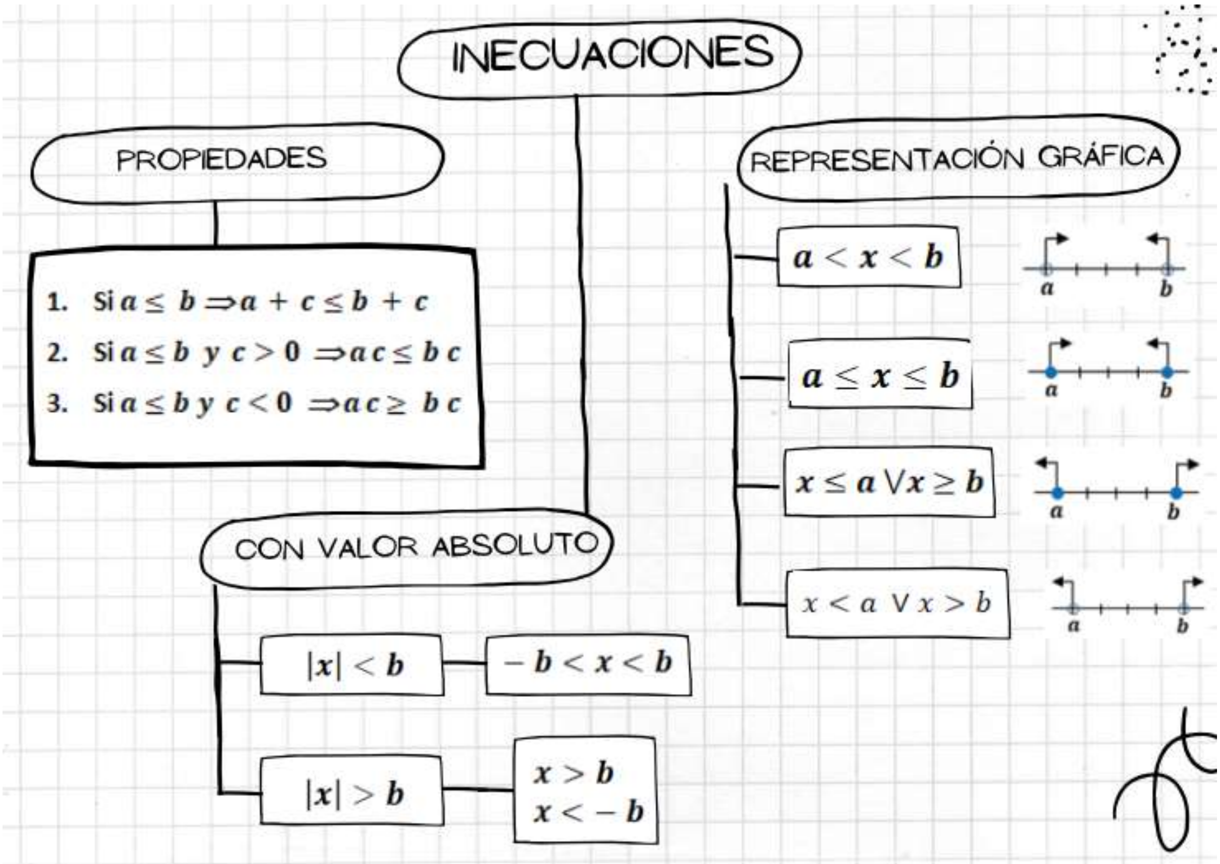


A MODO DE RESUMEN

ECUACIONES

CLASIFICACIÓN	CÓMO ES	CÓMO SE RESUELVE
LINEAL	La incógnita está elevada al exponente 1	Se trabaja algebraicamente hasta llegar a ecuaciones equivalentes en las que la incógnita aparezca despejada
CUADRÁTICA	Se pueden expresar de la forma $ax^2 + bx + c = 0$	Se trabaja hasta llegar a la forma $ax^2 + bx + c = 0$; Y se aplica: $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
EXPRESIONES FRACCIONARIAS	Aparece alguna incógnita como divisor	Se trabaja hasta llevarla a una ecuación equivalente que sea lineal o cuadrática, y se resuelve en consecuencia
CON VALOR ABSOLUTO	Aparece alguna incógnita entre barras de valor absoluto	Se desdobla la ecuación en dos igualdades, y se resuelven
QUE INVOLUCRAN RADICALES	Alguna incógnita está como radicando (o exponente fraccionario)	Se eleva ambos miembros al exponente que permita la simplificación del radical, y se resuelven las ecuaciones
LOGARÍTMICAS	La incógnita se encuentra en el argumento de un logaritmo	Se expresan de la forma $log_a(mx) = b$; y se aplica definición de logaritmo.
EXPONENCIALES	La incógnita aparece como exponente de un número real	Se expresan de la forma $a^x = b$, y se aplican propiedades de logaritmo.


ECUACIONES
CÓMO RESOLVERLAS
PASO 1
IDENTIFICAR EL TIPO DE ECUACIÓN
PASO 2
APLICAR PROCEDIMIENTO CORRESPONDIENTE AL TIPO DE ECUACIÓN
PASO 3
ENCONTRAR LA O LAS POSIBLES SOLUCIONES.
PASO 4
ENCONTRAR LA O LAS POSIBLES SOLUCIONES.


INECUACIONES
PROPIEDADES
1. Si $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
2. Si $a \leq b$ y $c > 0 \Rightarrow ac \leq bc$
3. Si $a \leq b$ y $c < 0 \Rightarrow ac \geq bc$
CON VALOR ABSOLUTO
$|x| < b$
$-b < x < b$
$|x| > b$
$x > b$
$x < -b$
REPRESENTACIÓN GRÁFICA
$a < x < b$
$a \leq x \leq b$
$x \leq a \vee x \geq b$
$x < a \vee x > b$
a
b

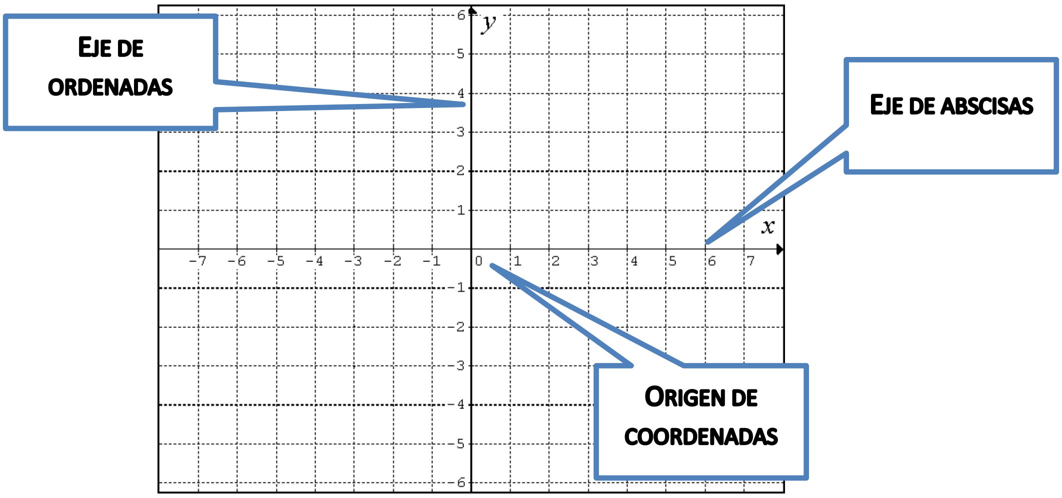
FUNCIONES

FUNCIONES

COORDENADAS CARTESIANAS

Hasta ahora hemos ubicado un punto en la recta de los números reales, asignándole un solo número real, llamado *coordenada del punto*. Para trabajar en un plano, asignamos al punto dos números reales, llamados coordenadas del punto en el plano.

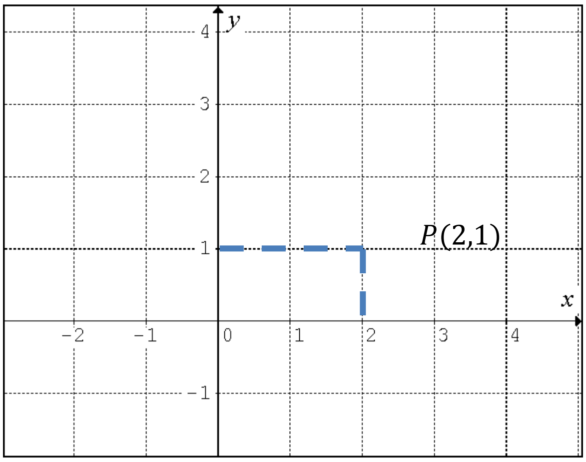
Partimos de dos rectas de números reales, una horizontal y otra vertical, y que se cortan en forma perpendicular. A la recta horizontal la llamamos *eje de abscisas (usualmente designado con la letra* x*)*, a la vertical, *eje de ordenadas (usualmente designado con la letra y), y* al punto de intersección entre ellas *origen de coordenadas* o.



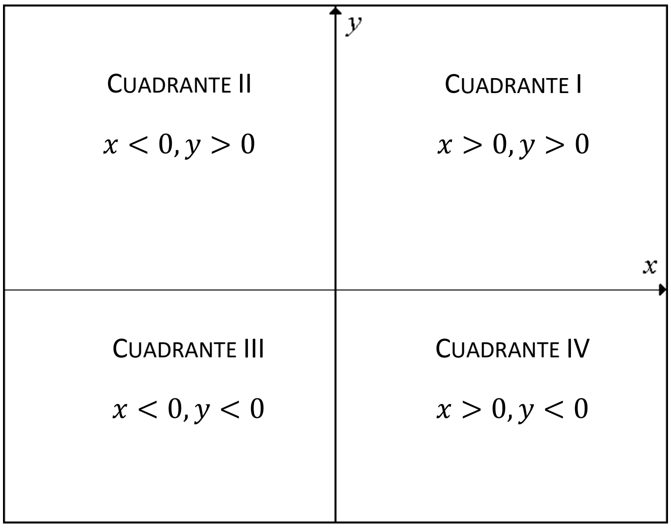
Asignamos coordenadas convenientes a cada una de las rectas numéricas, haciendo coincidir el punto o con el cero para ambos ejes, y respetando nuestra convención de colocar los reales positivos hacia la derecha de cero y los reales negativos hacia la izquierda. De la misma manera adoptaremos la convención de colocar los números reales positivos sobre el eje y por encima del cero, y los reales negativos por debajo de cero como se muestra en la figura anterior.

El sistema de coordenadas descrito se llama *sistema rectangular o cartesiano*[1] *de coordenadas*. Para localizar un punto P en este plano cartesiano se usa un par ordenado (x, y) de números reales. Por ejemplo para localizar un punto de coordenadas $(2, 1)$, avanzamos dos unidades sobre el eje x, desde el origen $(x = y = cero)$ hacia la derecha, luego subimos una unidad y marcamos ese punto, que representa el punto P buscado.

[1] Llamado así en honor de René Descartes (1596-1650), un matemático, filósofo y teólogo francés



De la misma manera podemos situar cualquier punto de coordenadas conocidas en este sistema, o bien, dado un punto del plano encontrar sus coordenadas. Teniendo en cuenta que los ejes de coordenadas, dividen al plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes, adoptamos la siguiente convención: en el primer cuadrante todas las coordenadas de x e y son positivas; en el segundo cuadrante, las coordenadas de x son negativas, mientras que las de y siguen siendo positivas; en el tercer cuadrante ambas coordenadas son negativas y finalmente en el cuarto, mientras y sigue siendo negativa, x es positiva. Los puntos que se encuentran sobre los ejes coordenados no pertenecen a ningún cuadrante. Esta situación se resume en el siguiente gráfico.

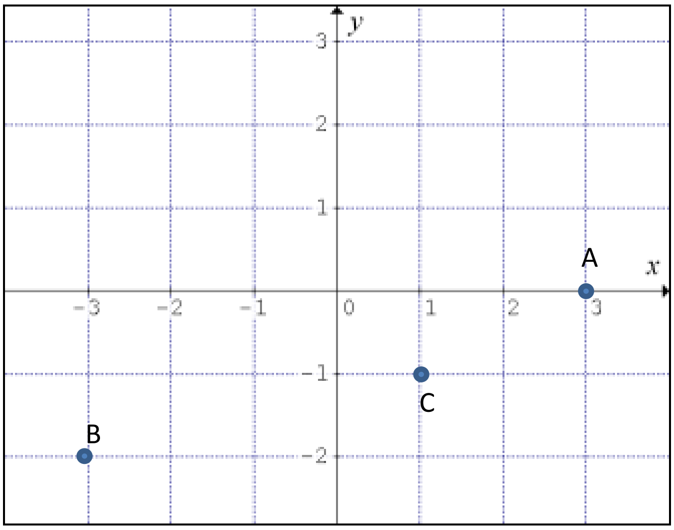


Actividad Nº 12

Te proponemos ahora que realices la siguiente actividad, teniendo en cuenta los conceptos vistos.

a) Sitúa los siguientes puntos en un sistema de coordenadas cartesianas $F(-1,3)$; $G(2,-1)$; $H(-2,-3)$, $J(3,2)$

b) Dados los puntos A, B y C, ubicados en el plano xy, indica las coordenadas para cada uno de ellos.

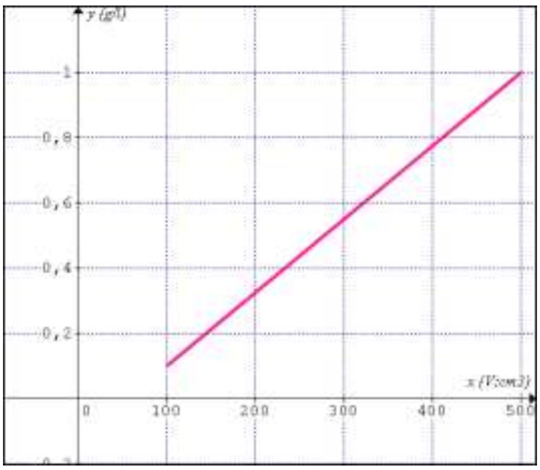


FUNCIONES

Las funciones son probablemente uno de los conceptos más importantes de la matemática actual, ya que es una herramienta muy valiosa para *describir, analizar, sacar conclusiones e interpretar diversas situaciones de otras ciencias o de la matemática misma a través de gráficos, tablas y fórmulas.* Comenzamos con una actividad que puede introducirte en los conceptos relacionados a función.

1. Una de las principales causas de los accidentes de tránsito está asociada al excesivo consumo de alcohol. Este produce la disminución de los reflejos, la falsa apreciación de las distancias, la subestimación de la velocidad y la reducción de la percepción del riesgo.
2. El límite de **alcoholemia** (cantidad de alcohol por litro de sangre) es de 0,5g por litro de sangre en conductores de autos, 0,2g/l para motociclistas y 0g/l para conductores de vehículos de pasajeros.
   a) La función $\boldsymbol{f}$ representada muestra el nivel de alcoholemia que alcanza un hombre de $60kg$, en función del volumen de vino ingerido.

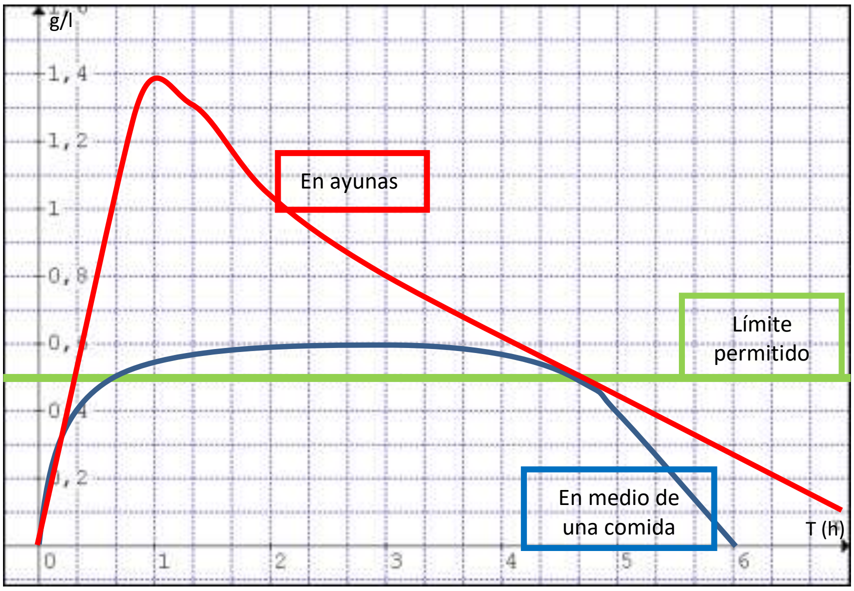
Nota: Un vaso de vino equivale a 100 cm^3



Observando la gráfica, responde:

a) ¿Qué grado de alcoholemia alcanza, si bebe dos vasos de vino?
b) ¿Qué cantidad de vino ingirió, si alcanza una alcoholemia de $0{,}7g/l$?
c) ¿Qué volumen como máximo puede beber un conductor de auto que pesa 60kg?

ALCOHOLEMIA EN FUNCIÓN DEL TIEMPO DE INGESTIÓN



Datos extraídos del diario La Nación, 20 de junio de 1997 y 22 de mayo de 1998
Situación extraída de: Matemática 9-EGB. Autores: M. E. Andrés y Otros. Editorial Santillana

Este gráfico muestra la alcoholemia que alcanza una persona en función del tiempo, a partir de la ingestión de tres cuartos litros de vino.

a) ¿En qué momento alcanza la mayor alcoholemia?
b) ¿Cuántas horas transcurren a partir de la ingestión de alcohol en medio de las comidas, hasta alcanzar el límite permitido para conducir un automóvil?
c) Si consumió alcohol en ayunas, a las 4hs de haberlo hecho ¿se encuentra en condiciones para manejar?

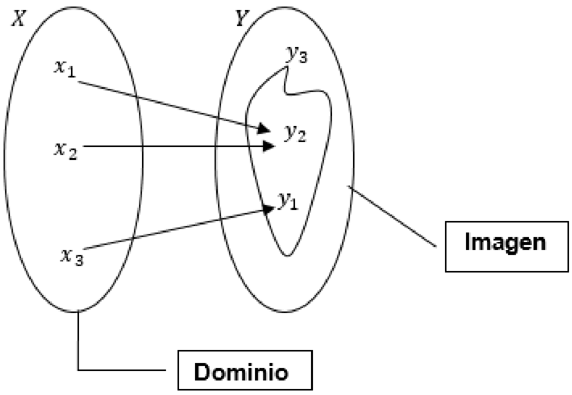
Comenzamos recordando conceptos como la *definición de función, dominio, imagen, función real, modos de representación y su clasificación*.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Sean X e Y dos conjuntos no vacíos de números reales.

Una función de X en Y es una regla o correspondencia que asocia a cada elemento de X un único elemento de Y.

El conjunto X es el dominio de la función. Para cada elemento x en X, le corresponde un elemento y de Y que es el valor de la función en x, o imagen de x. El conjunto de todas las imágenes de los elementos del dominio es el codominio, rango, conjunto imagen; o simplemente imagen de la función.

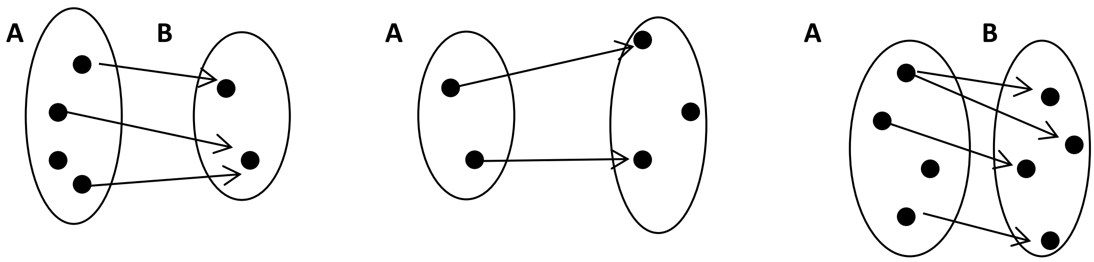


Observando el gráfico podemos concluir que a cada punto del dominio X le corresponde uno y sólo uno del conjunto imagen Y, pero existen puntos del dominio que tienen la misma imagen. Además, no existen puntos en el conjunto dominio que no tengan imagen, en cambio hay puntos del conjunto Y, que no son imagen de ningún elemento de X, por lo tanto:

Todos los elementos del conjunto X deben tener imagen. Luego el conjunto X coincide con el Dominio de la función; sin embargo puede haber elementos del segundo conjunto que no son imágenes de ningún punto del conjunto X, entonces el Conjunto imagen de la función puede coincidir con el conjunto Y, o ser un subconjunto de él.

Actividad Nº 13

Observa las siguientes relaciones de A en B, y decide cuáles son funciones. Justifica tu respuesta.



Algunas de las maneras para simbolizar que a cada x está asociado un único y, son las siguientes:

$$f: x \longrightarrow y\text{; o bien } x \longrightarrow f(x)\text{; o bien y} = f(x)$$

En nuestro curso adoptaremos la última expresión, denominando a x variable independiente, y a y, variable dependiente. La idea es que x toma valores libremente, mientras que y depende de los valores que toma x.

Consideremos la función definida por la ecuación:

$$y = 2x - 5 \qquad\qquad \text{siendo } 1 \leq x \leq 6$$

La expresión $1 \leq x \leq 6$ nos está indicando los valores de x para los cuales y existe, siendo y un número real. Por lo tanto, el intervalo $[1, 6]$, es el dominio de la función dada. La expresión $y = 2x - 5$, establece que a cada x del dominio se lo multiplica por dos y a ese valor se le resta cinco, obteniendo como resultado el conjunto de números reales que constituyen la imagen de la función.

Para obtener este conjunto, utilizamos otra forma de expresar la función llamada *expresión tabular de la función.*

x	$y = 2x - 5$
1	$y = 2 \cdot 1 - 5 = -3$
$\frac{3}{2}$	$y = 2 \cdot \frac{3}{2} - 5 = -2$
2	$y = 2 \cdot 2 - 5 = -1$
4	$y = 2 \cdot 4 - 5 = 3$
6	$y = 2 \cdot 6 - 5 = 7$

$Dom\ f = [1, 6]$ (expresado como un intervalo cerrado)

Mientras que el conjunto $\{-3, \dots, -2, \dots, -1, \dots .3, \dots .,7\}$ es el conjunto imagen de la función y representa el conjunto de valores que puede tomar la función para los valores dados de la variable independiente. Lo podemos expresar como:

$Imag\ f = [-3, -7]$ (expresado como un intervalo cerrado)

DETERMINACIÓN DEL DOMINIO Y CONJUNTO IMAGEN DE UNA FUNCIÓN

Con frecuencia, no se especifica el dominio de una función, sólo se proporciona la ecuación, dejando a nuestro cargo la determinación de los conjuntos dominio e imagen de la función. Pero ¿cómo procedemos cuando sólo tenemos una ecuación que representa una función?

Veamos algunos ejemplos que nos ayudarán a encontrar esos conjuntos.

a) $f(x) = x + 5$

b) $f(x) = x^2 - 2$

c) $f(x) = \frac{3x}{x^2-4}$

d) $f(x) = \sqrt{4 - 3x}$

Para la función dada en el ítem a), vemos que la variable independiente x puede tomar cualquier número real, y su imagen es un número real, por lo tanto podemos afirmar que tanto el dominio como el conjunto imagen de esa función coincide con el conjunto de los números reales.

En el caso de la función $f(x) = x^2 - 2$, la variable independiente x puede tomar cualquier número real, pero su imagen ya no coincide con el conjunto de los números reales, puesto que el exponente par, no permite que la expresión tome valores inferiores a -2. Por lo tanto podemos concluir que mientras el dominio coincide con el conjunto de los números reales, el conjunto imagen se extiende desde – 2 y hasta infinito.

En la tercera función, se presenta un caso distinto puesto que la variable independiente está en el numerador, pero también en el denominador de esta expresión algebraica fraccionaria. Analizando esa ecuación, podemos decir:

- la x del numerador puede tomar cualquier número real.
- el denominador es una diferencia, que no puede tomar el valor cero, ya que la división por cero es imposible. Entonces ¿cuáles son los valores de x que debo excluir para que esa expresión sea un número real? Has acertado, cuando x sea igual a 2 o – 2, la diferencia del denominador será cero, y la expresión no tendrá solución dentro del conjunto de los reales.

Por lo tanto el dominio es el conjunto de todos los reales, excepto 2 y – 2, mientras que el conjunto imagen son todos los reales.

La última función $f(x) = \sqrt{4-3x}$, nos propone otra dificultad. Se trata de un radicando formado por una diferencia entre un número real y el triple de la variable independiente. Sabemos que la raíz de índice par de un número negativo, no existe dentro del conjunto de los números reales; es decir que sólo se obtiene un número real de ese radicando cuando $4-3x \geq 0$.

Para encontrar los números reales que puede tomar la variable independiente x, debemos resolver la inecuación anterior. ¿Recuerdas?

Comenzamos restando 4 a todos los miembros de la desigualdad $4-3x \geq 0$.

$$4-3x-4 \geq 0-4;\ \text{resolviendo}$$

$$-3x \geq -4\ \text{dividiendo por}\ -3$$

$$x \leq \frac{4}{3}$$

Observa la última expresión ¿qué ha cambiado? ¿Recuerdas por qué? Si tienes dudas, vuelve a releer en este apunte Inecuaciones.

Escribamos ahora los dominios y condominios de cada una de las funciones dadas.

a) $f(x) = x + 5$ Dom: $(-\infty, \infty)$, Imag: $(-\infty, \infty)$,

b) $f(x) = x^2 - 2$ Dom: $(-\infty, \infty)$, Imag: $[-2, \infty)$,

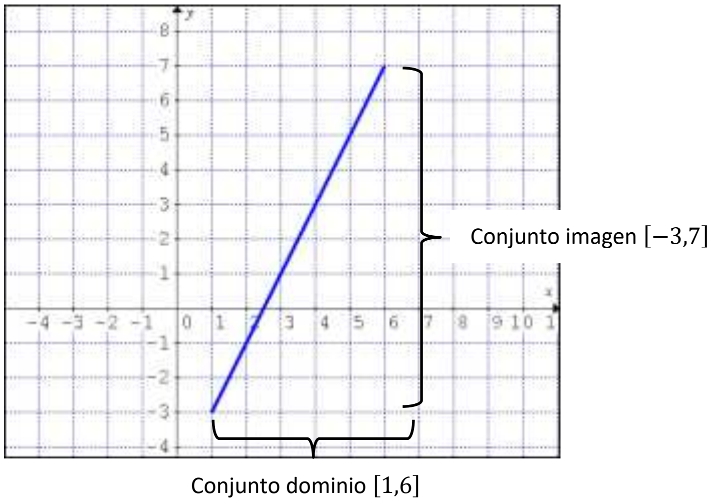
c) $f(x) = \frac{3x}{x^2-4}$ Dom: $(-\infty, -2) \cup (-2,2) \cup (2, \infty)$, Imag: $(-\infty, \infty)$,

d) $f(x) = \sqrt{4-3x}$ Dom: $[4/3, \infty)$, Imag: $[0, \infty)$

Observación: Si posees un graficador en tu PC o en tu calculadora, grafica estas funciones y comprueba la veracidad de las afirmaciones anteriores.

Es muy habitual, utilizar gráficos para representar situaciones de aplicación que muestran más claramente la relación entre x e y. Cuando la regla que define una función f está dada mediante una ecuación en x e y, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación, y por lo tanto el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano xy que satisfacen la ecuación dada.

Para el ejemplo dado anteriormente la representación gráfica es la siguiente:



No todo conjunto de puntos en el plano xy representa la gráfica de una función. Recordemos que para una función, cada número x en el dominio de f tiene una y sólo una imagen $f(x)$. Por lo tanto, la gráfica de una función no puede contener dos puntos con la misma abscisa y diferentes ordenadas.

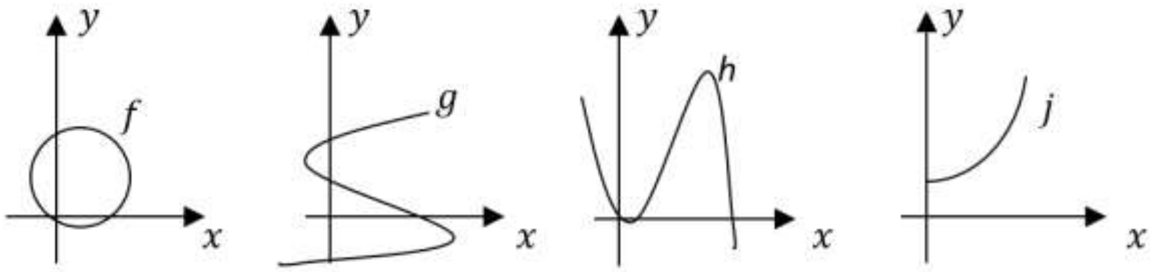
Para determinar si la gráfica de una relación es una función, debe satisfacer el siguiente criterio, llamado *criterio de la recta vertical:*

Un conjunto de puntos (x, y) en el plano xy representan la gráfica de una función, si y sólo si, cualquier recta vertical interseca a la gráfica a lo sumo en un punto.

A continuación, te presentamos una actividad que contiene una serie de gráficos para que observes si representan o no, funciones.

Actividad Nº 14

Dibuja para cada gráfico una recta vertical que te permita decidir si el gráfico es o no la representación de una función en el plano xy.



INTERSECCIONES CON LOS EJES COORDENADOS

Los puntos, si los hay, en los cuales la gráfica de una función cruza los ejes de coordenadas son llamados intersecciones.

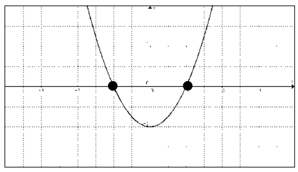
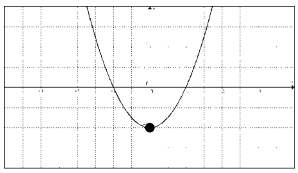
La coordenada x de un punto en el cual la gráfica cruza o toca el eje de abscisas es llamada *raíz* o *cero de la función*.

La coordenada y de un punto en el cual la gráfica cruza o toca el eje de ordenadas es llamada *ordenada al origen.*

Para encontrar las intersecciones- x, si las hay, de la gráfica de una ecuación, se debe igualar la y a cero en la ecuación y resolver.

Para encontrar las *intersecciones-* y, si las hay, de la gráfica de una ecuación, se debe reemplazar x por cero en la ecuación y resolver.

Veamos un ejemplo. Sea $y = x^2 - 1$.

Intersecciones	**Forma analítica**	**Forma gráfica**
Intersección con el eje x *Raíces o ceros de la función*	Hacer $y = 0$, o sea $0 = x^2 - 1$; despejando: $x^2 = 1$ $x = \pm 1$	
Intersección con el eje y *Ordenada al origen*	Hacer $x = 0$, o sea $y = 0 - 1$; despejando $y = -1$	

INTERVALOS DE POSITIVIDAD Y NEGATIVIDAD DE UNA FUNCIÓN

Sea D_f el dominio de definición de la función f, definimos:

- ✓ $P = \{x / x \in D_f \wedge f(x) > 0\}$ Intervalo/s de positividad de f.
- ✓ $N = \{x / x \in D_f \wedge f(x) < 0\}$ Intervalo/s de negatividad de f.

Para ver cómo hallar dichos intervalos veamos algunos ejemplos:

Ejemplo1: Sea $y = 2x - 3$

Para hallar los intervalos de positividad de f procedemos analíticamente así:

i) Planteamos la desigualdad de la definición de P.

$$2x - 3 > 0$$

ii) Resolvemos la inecuación.

$$2x > 3$$

$$x > \frac{3}{2} \Rightarrow P = \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$$

De manera similar, para hallar los intervalos de negatividad de f:

i) Planteamos la desigualdad de la definición de N

$$2x - 3 < 0$$

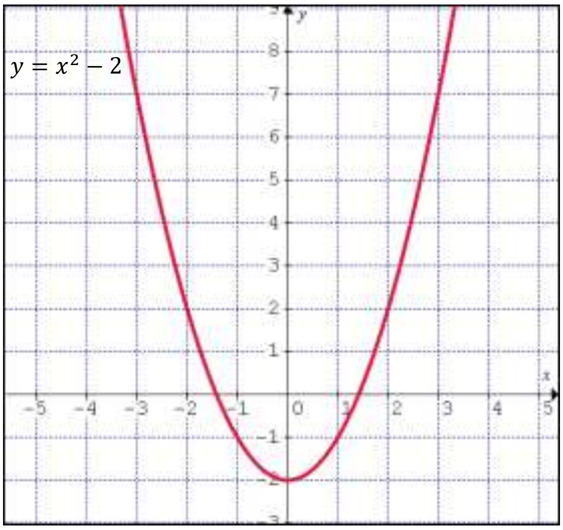
ii) Resolvemos la inecuación

$$2x < 3$$

$$x < \frac{3}{2} \Rightarrow N = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$$

Ejemplo 2: Sea $y = x^2 - 2$

Supongamos ahora que queremos hallar los intervalos de positividad y negatividad de la función. Empezamos por la representación gráfica:



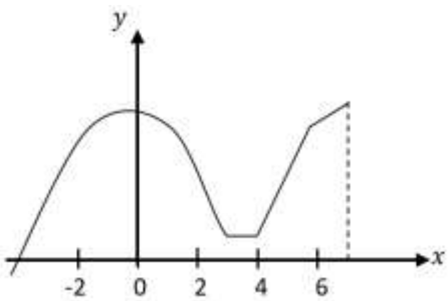
En la gráfica vemos que la intersección con el eje de abscisas ocurre en $x_1 = -\sqrt{2}$ y $x_2 = \sqrt{2}$. Luego:

$$N = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,\right)$$

$$P = \left(-\infty, -\sqrt{2}\,\right) \cup \left(\sqrt{2}, \infty\right)$$

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Consideremos la gráfica de una función como la siguiente:



Si la recorremos de izquierda a derecha, se observará que en algunas de sus partes *sube*, en otras, *baja* y en otras *permanece horizontal* (paralela al eje de abscisas). En tales casos, decimos que la función es *creciente, decreciente y constante*, respectivamente.

¿Dónde es la función dada creciente, decreciente y constante? Para responder a esta pregunta determinamos intervalos sobre el eje de abscisas. De este modo, podemos decir:

Intervalo de crecimiento: $(-\infty, 0) \cup (4,7)$

Intervalo de decrecimiento: $(0,3)$

Intervalo constante: $(3,4)$

FUNCIONES ELEMENTALES

Hemos trabajado con las ecuaciones y los gráficos de funciones. Algunas de ellas son muy utilizadas y reciben nombres especiales de acuerdo con sus características.

1. Función polinómica de primer grado o función lineal

La expresión analítica de estas funciones es un polinomio de primer grado, es decir, una expresión del tipo:

$$\boldsymbol{y = mx + b} \quad \textit{con: } \boldsymbol{m, b} \in \mathbb{R} \textit{ y } \boldsymbol{m \neq 0}$$

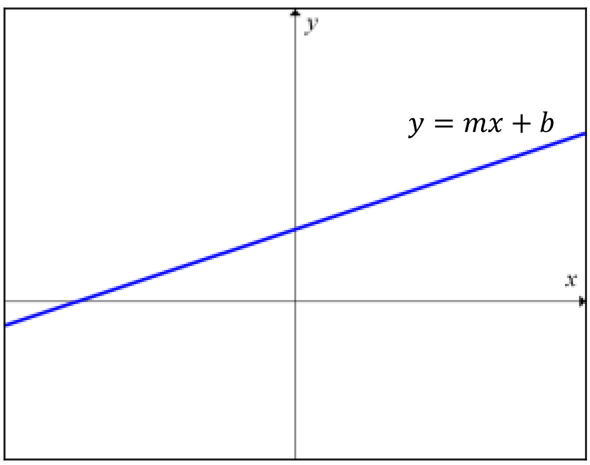
En esta expresión:

- m es la pendiente
- b es la ordenada al origen

*Observación: Esta función también suele denominarse **función afín**, dejando el nombre de función lineal a aquella donde $b = 0$, es decir, $y = mx$. Nosotros nombraremos indistintamente a una y otra como función lineal.*

Este tipo de funciones se caracterizan porque la variación (o incremento) de la variable dependiente es ***directamente proporcional*** a la variación (o incremento) de la variable independiente, característica de gran valor para describir distintos tipos de fenómenos que son muy usuales.

Cuando una función es de este tipo se dice que la variable y depende linealmente de la variable x. El motivo es que la gráfica de esta función es siempre una línea recta no vertical.



Analicemos cada uno de los *parámetros* que aparecen en su ecuación:

- el *coeficiente* m del término lineal se denomina ***pendiente de la recta***, pues es una medida de la inclinación de la misma, e indica la variación de la función por cada unidad que se incrementa la variable independiente x.

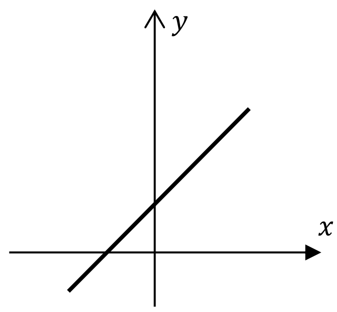
- el *término independiente* b se denomina ***ordenada en el origen*** y señala la ordenada del punto donde la función corta al eje y, puesto que es el valor que toma la función cuando x es igual a cero.

Hemos estudiado el Dominio y el Conjunto Imagen de distintas funciones. Esta característica resulta muy importante para cuando la ecuación de la función lineal describe un fenómeno a describir. ¿Recuerdas como lo hicimos?

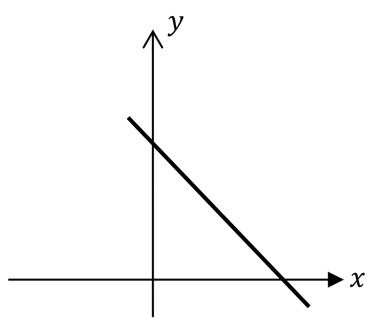
Observemos la ecuación de una función lineal y pensemos ¿cuáles son los valores del conjunto de los números reales que puede tomar la variable independiente x, para los cuales la función toma un valor real?

Tanto el Dominio como el Conjunto Imagen de una función lineal coinciden con el conjunto de los números reales.

Observemos ahora, la representación gráfica de funciones lineales, donde el valor de la pendiente es positivo y otro donde la pendiente toma un valor negativo, y notemos algunas características importantes de cada una de ellas.



Si $m > 0$
Por cada unidad que se incrementa x la función crece m unidades
Función creciente



Si $m < 0$
Por cada unidad que se incrementa x la función decrece m unidades
Función decreciente

Veamos algunos ejemplos numéricos que presentan esas características:

$f(x) = 2x + 3$; Pendiente $m = 2$; función creciente, por cada unidad que se incrementa x la función crece dos unidades. Esto puede expresarse a través de los siguientes valores en los que es evaluada la función.

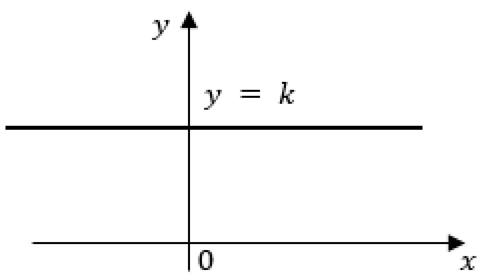
$$x = 0 \to f(x) = 3$$
$$x = 1 \to f(x) = 5$$
$$x = 2 \to f(x) = 7$$

$g(x) = -2x + 1$; Pendiente $m = -2$; función decreciente, por cada unidad que se incrementa x la función decrece dos unidades. Esto puede expresarse a través de los siguientes valores en los que es evaluada la función.

$$x = 0 \rightarrow g(x) = 1$$
$$x = 1 \rightarrow g(x) = -1$$
$$x = 2 \rightarrow g(x) = -3$$

Función constante: es una función lineal especial donde m = 0.

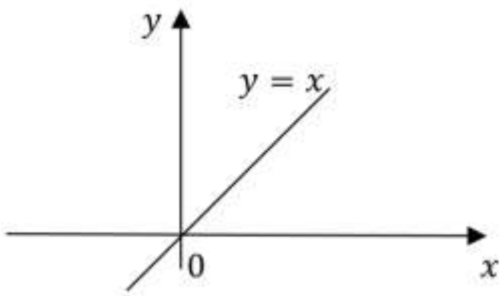
$$y = k \quad con\, k \in \mathbb{R}$$



Su gráfica es una recta paralela al eje de las abscisas, cuya ordenada es k. Su dominio es el conjunto de todos los reales, su Conjunto Imagen está formado por un único número real k.

Función identidad: es una función lineal especial donde $m = 1$ y su ordenada al origen $b = 0$.

$$y = x \quad con\, k \in \mathbb{R}$$



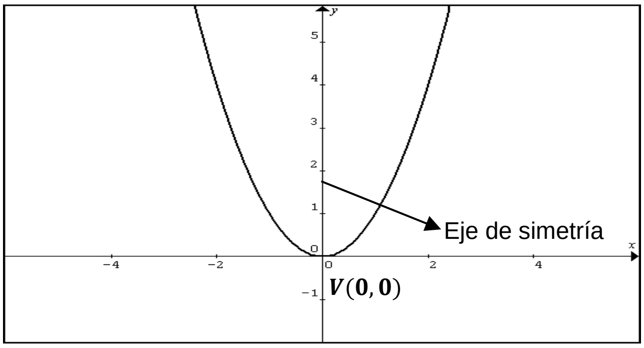
Su gráfica es una recta con pendiente $m = 1$ y ordenada al origen $b = 0$. Su dominio y su Conjunto Imagen es el conjunto de todos los números reales. La recta consta de todos los puntos para los cuales el valor de la abscisa es igual al valor de la ordenada. *Es una función creciente en todo su dominio.*

2. Función polinómica de segundo grado o función cuadrática

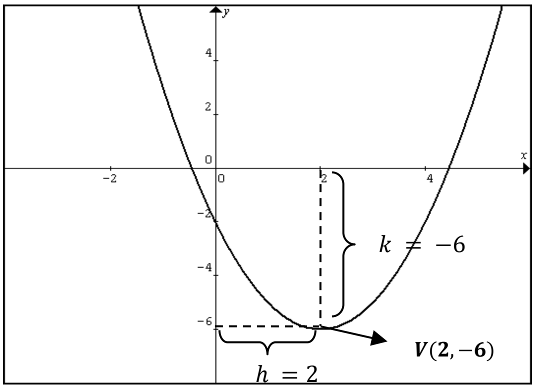
Es una expresión del tipo:

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \quad \text{o} \quad y = a\,x^2 + b\,x + c \quad \text{con } a \neq 0$$

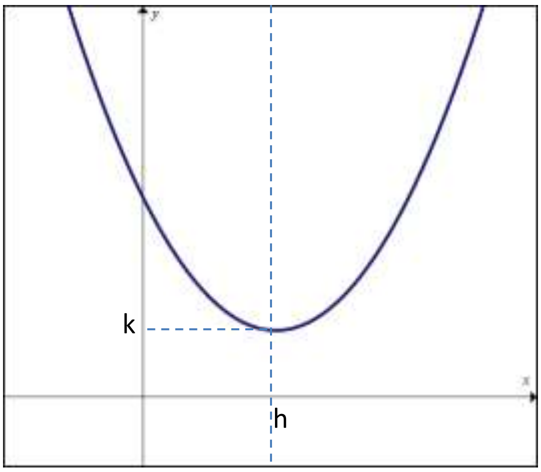
Su gráfica es una curva llamada *parábola.*



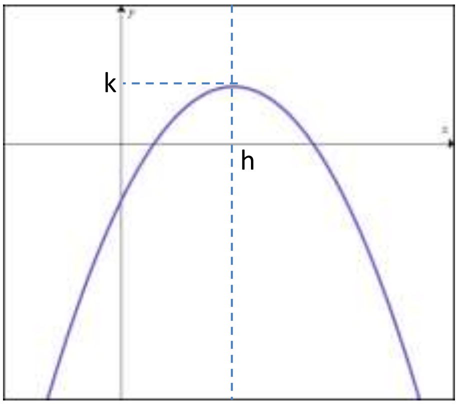
La parábola representada es centrada, puesto que su vértice $V(0, 0)$ coincide con el origen de coordenadas. Puede ocurrir que su vértice no coincida con el origen del sistema de coordenadas en cuyo caso decimos que es una parábola descentrada, con $V(h, k)$, donde h y k son las coordenadas x e y del vértice.



Analicemos los elementos y puntos notables en los siguientes gráficos.



- $Dom\ (-\infty, \infty)$
- $Img\ (k, \infty)$
- Intervalo de crecimiento (h, ∞)
- Intervalo de decrecimiento $(-\infty, h)$
- Eje de simetría $x = h$
- El vértice es un mínimo de coordenadas (h, k)
- La función es cóncava hacia arriba



- $Dom\ (-\infty, \infty)$
- $Img\ (-\infty, k)$
- Intervalo de crecimiento $(-\infty, h)$
- Intervalo de decrecimiento (h, ∞)
- Eje de simetría $x = h$
- El vértice es un máximo de coordenadas (h, k)
- La función es cóncava hacia abajo

Fórmula:

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$\rightarrow \begin{cases} Si\ a > 0, la\ parábola\ está\ abierta\ hacia\ arriba\ (concavidad\ positiva) \\ Si\ a < 0, la\ parábola\ está\ abierta\ hacia\ abajo\ (concavidad\ negativa) \end{cases}$$

$$Coordenadas\ del\ vértice: \begin{cases} x = -\dfrac{b}{2a} \\ y = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\ (sustituimos\ el\ valor\ de\ x\ en\ la\ función) \end{cases}$$

Puntos de intersección con los ejes:

- Eje $x \rightarrow y = 0$. Igualamos a cero la ecuación de la función, y resolvemos aplicando:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De acuerdo al signo del discriminante $(b^2 - 4ac)$; pueden resultar tres casos:

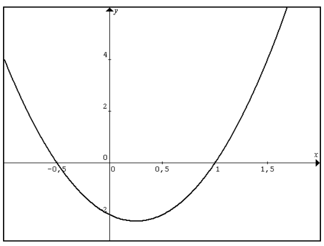
$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \rightarrow dos\ raíces\ reales\ distintas.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \rightarrow una\ única\ raíz\ real.$$

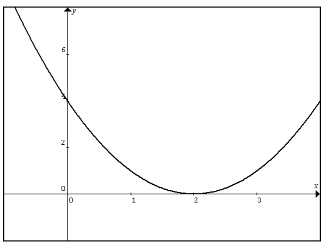
$$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \rightarrow no\ tiene\ raíces\ reales.$$

- Eje $y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = c$. Punto de intersección de la función con el eje y: $(0, c)$

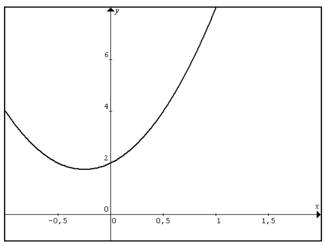
De acuerdo con las características de los ceros de la función, las gráficas son de la siguiente forma general:



$\Delta > 0\ \rightarrow \begin{cases} (x_1, 0) \\ (x_2, 0) \end{cases}$



$\Delta = 0\ \rightarrow (x, 0)$



$\Delta < 0\ \rightarrow$ no interseca al eje x

Características de la función

- → Dominio. Por ser una función algebraica entera, su dominio coincide con el conjunto de los números reales $Dom = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
- → Conjunto imagen. Considerando que el par (h, k) representan las coordenadas del vértice resulta:
  - ✓ si su concavidad es positiva, Imagen: $[k; \infty)$.
  - ✓ si su concavidad es negativa, Imagen: $(-\infty; k]$.
- → Crecimiento, decrecimiento, máximo y mínimo. Presentan siempre una rama creciente y otra decreciente, por lo tanto, presentará:
  - ✓ un máximo si la concavidad es negativa
  - ✓ un mínimo si la concavidad es positiva

Análisis de los coeficientes para la graficación de parábolas

Para graficar una parábola sin formar un cuadro de valores, o reconocer su gráfica a partir de la ecuación, observaremos las siguientes condiciones en sus parámetros.

Dada la función $y = a\,x^2 + b\,x + c$

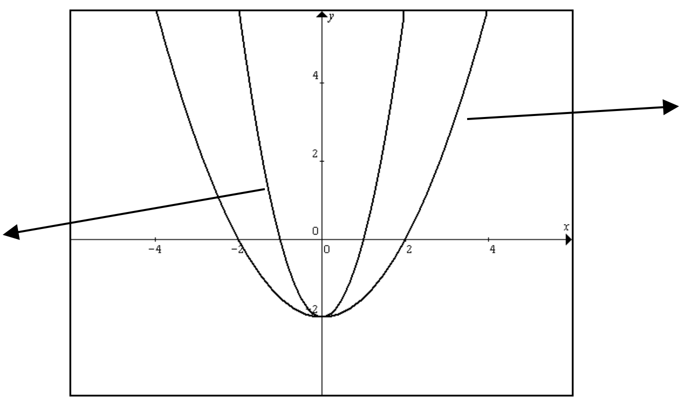
- → El signo de a (coeficiente del término cuadrático) indica el signo de la concavidad:
  - a positiva → concavidad positiva
  - a negativa → concavidad positiva.
- → El valor absoluto de a indica si las ramas de la parábola están más cerca o más alejadas del eje de ordenadas. Mientras más grande sea a (en valor absoluto), más se cierran las ramas de la parábola hacia el eje de simetría.
- → El valor de c (término independiente) marca el punto donde la parábola corta al eje de las ordenadas.
- → Si a y b tienen distinto signo la parábola se desplaza a la derecha; y si tienen igual signo, la parábola se desplaza hacia la izquierda.

$y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

$\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$

$y = 2x^2 - 2$

$\boldsymbol{a = 2}$



Dada $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son parámetros conocidos.

si

a negativa → concavidad hacia abajo
a positiva → concavidad hacia arriba
$1 < |a|$ ramas más cercanas al eje de simetría
$1 > |a|$ ramas más alejadas del eje de simetría..

c determina el punto de intersección de la función con y

a y b, igual signo → desplazamiento a la izquierda
a y b, distinto signo → desplazamiento a la derecha

3. Función exponencial

Hasta ahora hemos estudiado potencias pertenecientes a distintos campos numéricos:

→ Potencias de exponente natural: $a^n = \underbrace{a\,a\,a\,a\ \cdots a}_{n\ veces}$; con $n \in \mathbb{N}$

→ Potencias de exponente nulo: $a^0 = 1\ (a \neq 0)$

→ Potencias de exponente entero negativo: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ con $n \in \mathbb{N}$, $(a \neq 0)$

→ Potencias de exponente fraccionario: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$

Conocemos dos propiedades básicas de potenciación:

→ $a^m a^n = a^{m+n}$

→ $(a^n)^m = a^{n\,m}$ con $n, m \in \mathbb{Q}$

Es posible dar sentido a expresiones tales como 2^π, $3^{\sqrt{2}}$ y estimar su valor a partir de una aproximación del exponente irracional. Las propiedades antes mencionadas se extienden para el caso en que n y m son números reales cualesquiera.

Con esto, podemos definir la función exponencial.

Dado $a > 0$, llamamos *función exponencial* de base a a la función definida por:

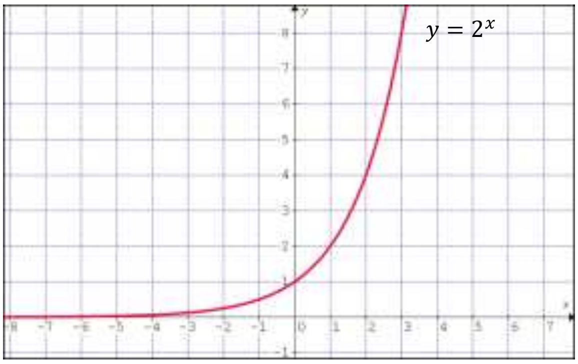
$$\boldsymbol{f(x) = a^x}$$

Su comportamiento es muy distinto según sea $a > 1$, o bien, $0 < a < 1$

Nota: Excluimos la base $a = 1$, ya que esta función es tan sólo la función constante $f(x) = 1^x = 1$. También debemos excluir las bases negativas, ya que de lo contrario tendríamos que excluir muchos valores de x del domino como $x = 1/2$ o $x = 3/2$, etc. Con lo cual tendríamos $(-2)^{1/2}$; $(-2)^{3/2}$, etc.; que no existen en el conjunto de los números reales.

Análisis de la función exponencial

1. La base es: $a > 1$ Ejemplo: $y = 2^x$



x	$y = 2^x$
-3	0,125
-2	0,25
-1	0,5
$-0,5$	0,707
0	1
2	4

• El dominio de $f(x)$ es el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$).

• El conjunto imagen de $f(x)$ es el conjunto de los números reales positivos ($\mathbb{R}^+$).

• El gráfico de $f(x)$ no corta al eje x por lo tanto no presenta ceros.

• El gráfico de $f(x)$ interseca al eje y en el punto $(0,1)$.

• El eje x es una asíntota horizontal al gráfico de $f(x)$.

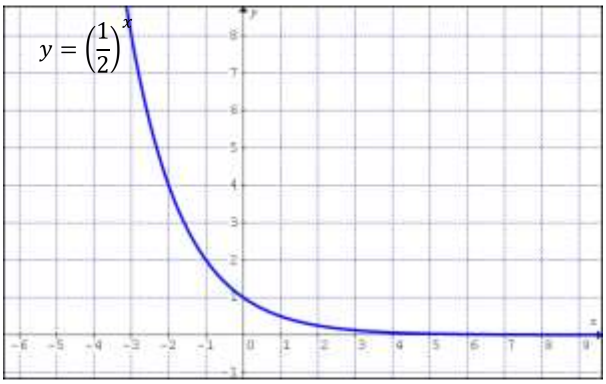
• La función $f(x)$ es estrictamente creciente si $a > 1$.

• Intervalo de positividad: Teniendo presente que la base de la potencia es un número real positivo independientemente del exponente que se considere, nunca sería posible obtener una potencia negativa por la definición misma de potenciación, por lo que la función toma valores positivos en todo el dominio.

• Intervalo de negatividad: Considerando lo indicado para intervalo de positividad deducimos que la función no toma valores negativos en ningún valor del dominio, por lo que el intervalo de negatividad no existe.

Cuando x se hace cada vez más grande, la función se hace más grande y cuando x se hace cada vez más pequeña también lo hace la función y se acerca cada vez más a cero.

2- La base es: $0 < a < 1$ Ejemplo: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
$-0,5$	0,707
0	1
2	0,25

• El dominio de $f(x)$ es el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$).

• El conjunto imagen de $f(x)$ es el conjunto de los números reales positivos ($\mathbb{R}^+$).

• El gráfico de $f(x)$ no corta al eje x por lo tanto no presenta ceros.

• El gráfico de $f(x)$ interseca al eje y en el punto $(0{,}1)$.

• El eje x es una asíntota horizontal al gráfico de $f(x)$.

• La función $f(x)$ se estrictamente decreciente si $0 < a < 1$.

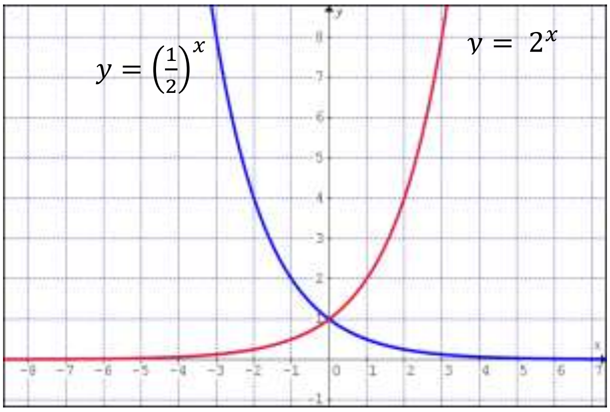
• Intervalo de positividad: Teniendo presente que la base de la potencia es un número real positivo independientemente del exponente que se considere, nunca sería posible obtener una potencia negativa por la definición misma de potenciación, por lo que la función toma valores positivos en todo el dominio.

• Intervalo de negatividad: Considerando lo indicado para intervalo de positividad deducimos que la función no toma valores negativos en ningún valor del dominio, por lo que el intervalo de negatividad no existe.

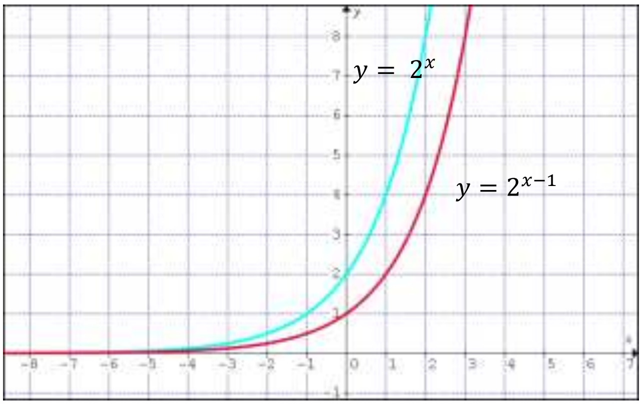
• Pasa por los puntos: $(0, 1)$ y $(1, a)$.

Desplazamientos de la función exponencial

Tomemos la función típica, que es $f(x) = 2^x$, pero si el exponente es negativo, se obtiene la función exponencial cuya base es $0 < a < 1$, como vemos en la gráfica.



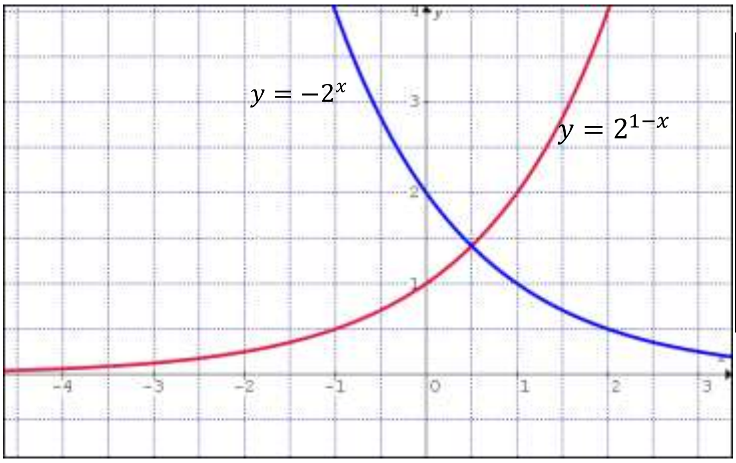
Ahora modificaremos el exponente, sumándolo o restándole un número. Por ejemplo: $y = 2^{x-1}$.



x	$y = 2^x$	$y = 2^{x-1}$
-2	0,25	0,125
-1	0,5	0,25
0	1	0,5
1	2	1
2	4	2

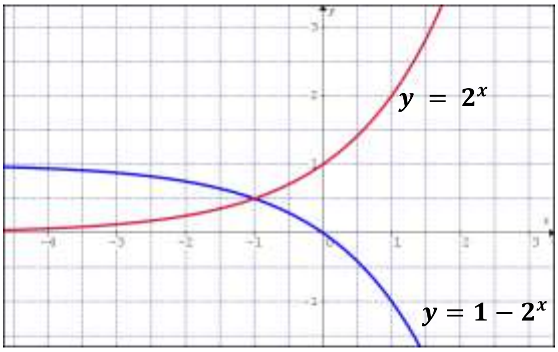
Observando esta tabla, vemos que la imagen de la función a la que le hemos restado uno al exponente es la mitad de la típica función exponencial, es decir, la función $y = 2^x$.

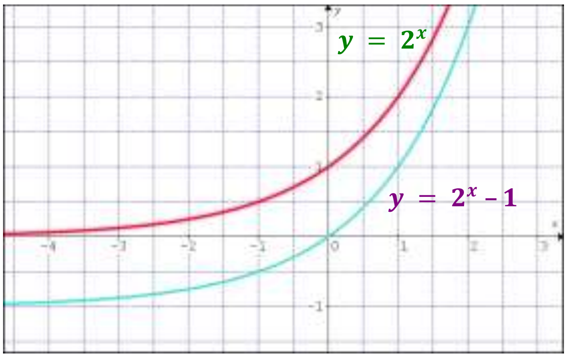
Si ahora en cambio la función exponencial es $y = 2^{1-x}$.



x	$y = 2^x$	$y = 2^{1-x}$
-2	0,25	8
-1	0,5	4
0	1	2
1	2	1
2	4	0,5

Finalmente, lo que vamos a hacer es sumarle o restarle un número a la función típica. Por ejemplo:





Función exponencial natural

Ya sabemos que cualquier número positivo y distinto de uno puede ser base de una función exponencial, pero algunas bases se utilizan con mayor frecuencia. En general las bases más utilizadas son: 2, 10 pero la más usada para aplicar en problemas de la naturaleza es la función exponencial que tiene por base un número irracional que es el llamado número e, cuyo valor es 2,718281 …., por lo que es un número irracional de infinitas cifras decimales.

La función exponencial natural es: $f(x) = e^x$, su uso es tan frecuente que ha sido incorporado a las calculadoras como un caso especial de la función exponencial.

Ejemplo: Un elemento radiactivo que decae en su crecimiento después de un tiempo t satisface la fórmula $f(t) = 60.2^{-0{,}02t}$, donde t se mide en años.

a) ¿Cuál es la cantidad de este elemento al inicio del proceso?

b) ¿Qué cantidad queda después de 500 años?

Solución:

a) El inicio del proceso será cuando t sea igual a cero, por lo tanto:

$$f(0) = 60.2^0 \rightarrow f(0) = 60$$

b) Ahora si $t = 500$ años

$$f(500) = 60.2^{-0{,}02.500} \rightarrow f(500) = 30$$

4. **Función logarítmica**

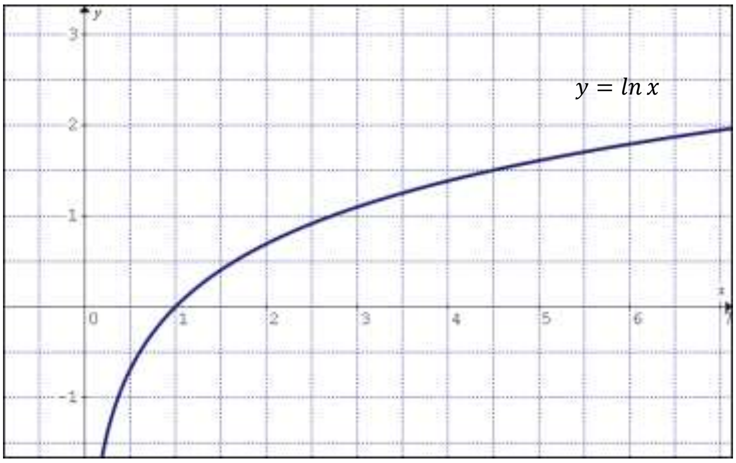
Si a es un número positivo y distinto de 1 podemos definir a la función logarítmica como:

$$\boldsymbol{y = log_a x}$$

Recordemos que a es la **base** del logaritmo, x es el **argumento** del logaritmo.

Análisis de la función logarítmica

1- La base es: $a > 1$ Ejemplo: $y = lnx$



Recordemos que, en este caso, el dominio de la función exponencial $y = e^x$ es $(-\infty, \infty)$ y su imagen es $(0, \infty)$. La función logarítmica $y = lnx$ es la función inversa de la función exponencial $y = e^x$. Luego, el dominio de la función logarítmica será la imagen de la función exponencial, y la imagen de la función logarítmica será el dominio de la función exponencial. Generalizando y resumiendo:

FUNCIÓN EXPONENCIAL	FUNCIÓN LOGARÍTMICA
$y = a^x$ con $a > 1$	$y = log_a x$ con $a > 1$
$Dom\ f: (-\infty, \infty) =$ IR	$Dom\ f: (0, \infty) =$ IR$^+$
$Im\ f: (0, \infty) =$ IR$^+$	$Dom\ f: (-\infty, \infty) =$ IR

• El gráfico de $f(x)$ interseca al eje x en el punto $(1,0)$.

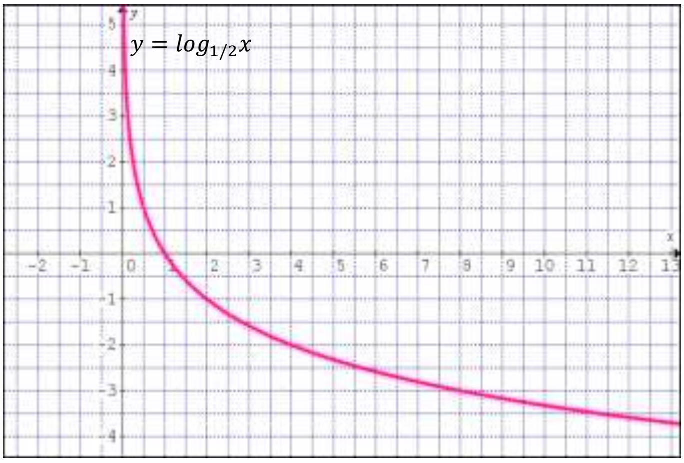
• El eje y es una asíntota vertical al gráfico de $f(x)$.

• La función $f(x)$ es estrictamente creciente.

• Intervalo de positividad: Teniendo presente que la gráfica de la función corta al eje x en $x = 1$ este intervalo es $(1, \infty)$.

• Intervalo de negatividad: Considerando lo indicado para intervalo de positividad deducimos que la función toma valores negativos en $(0,1)$.

2- La base es: $0 < a < 1$ Ejemplo: $y = log_{\frac{1}{2}}x$



Comparando con la función exponencial de igual base que la logarítmica (es decir, su inversa):

FUNCIÓN EXPONENCIAL	**FUNCIÓN LOGARÍTMICA**
$y = a^x$ con $0 < a < 1$	$y = log_a x$ con $0 < a < 1$
$Dom\ f: (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$	$Dom\ f: (0, \infty) = \mathbb{R}^+$
$Im\ f: (0, \infty) = \mathbb{R}^+$	$Dom\ f: (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

• El gráfico de $f(x)$ interseca al eje x en el punto $(1,0)$.

• El eje y es una asíntota vertical al gráfico de $f(x)$.

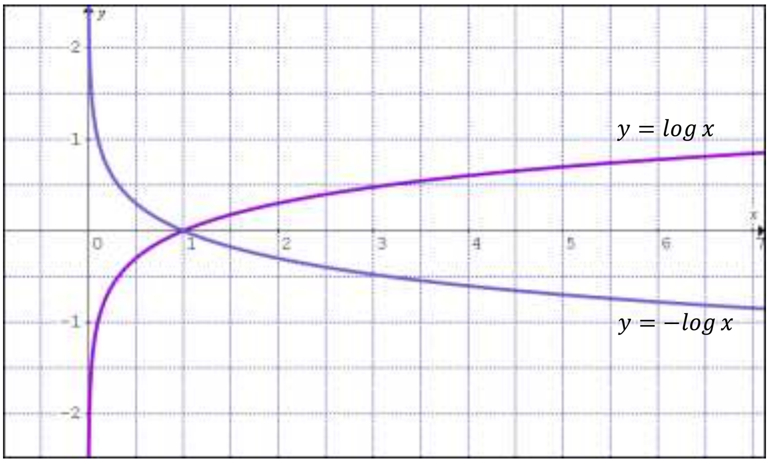
• La función $f(x)$ es estrictamente decreciente.

• Intervalo de positividad: Teniendo presente que la gráfica de la función corta al eje x en $x = 1$ este intervalo es $(0,1)$.

• Intervalo de negatividad: Considerando lo indicado para intervalo de positividad deducimos que la función toma valores negativos en $(1, \infty)$.

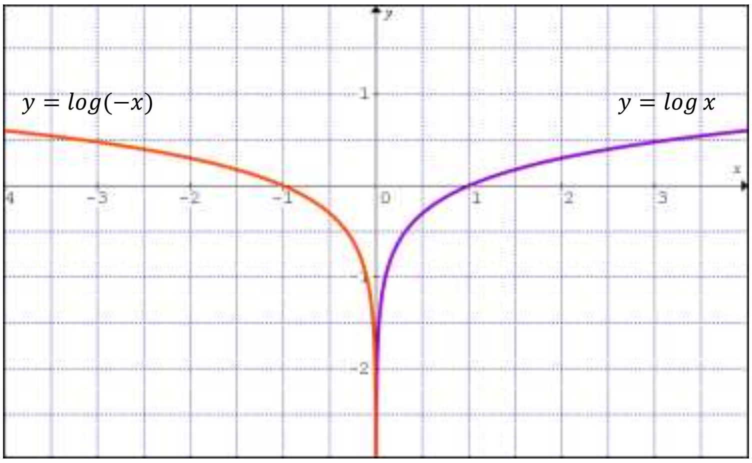
Desplazamientos de la función logarítmica

Vamos a bosquejar la gráfica de $y = -log\, x$, basándonos en la gráfica de $y = log\, x$. Básicamente cambiamos el signo a los resultados de la tabla de valores de la función $y = log\, x$ para obtener:



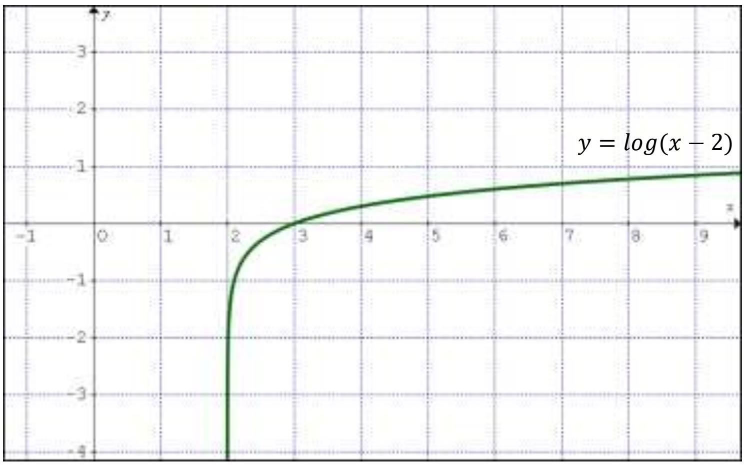
Veamos otro ejemplo: obtengamos $\boldsymbol{y = log(-x);}$ a partir de $\boldsymbol{y = log\, x}$.

Para ello simplemente reflejamos la gráfica de $y = log\, x$ respecto del eje de ordenadas, para obtener la gráfica buscada.

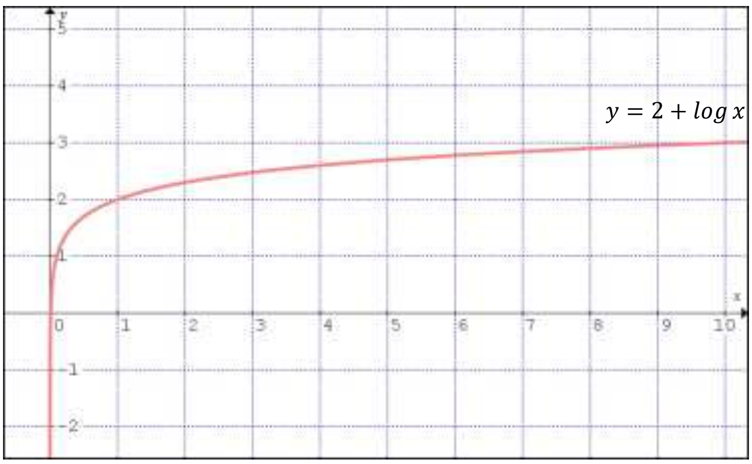


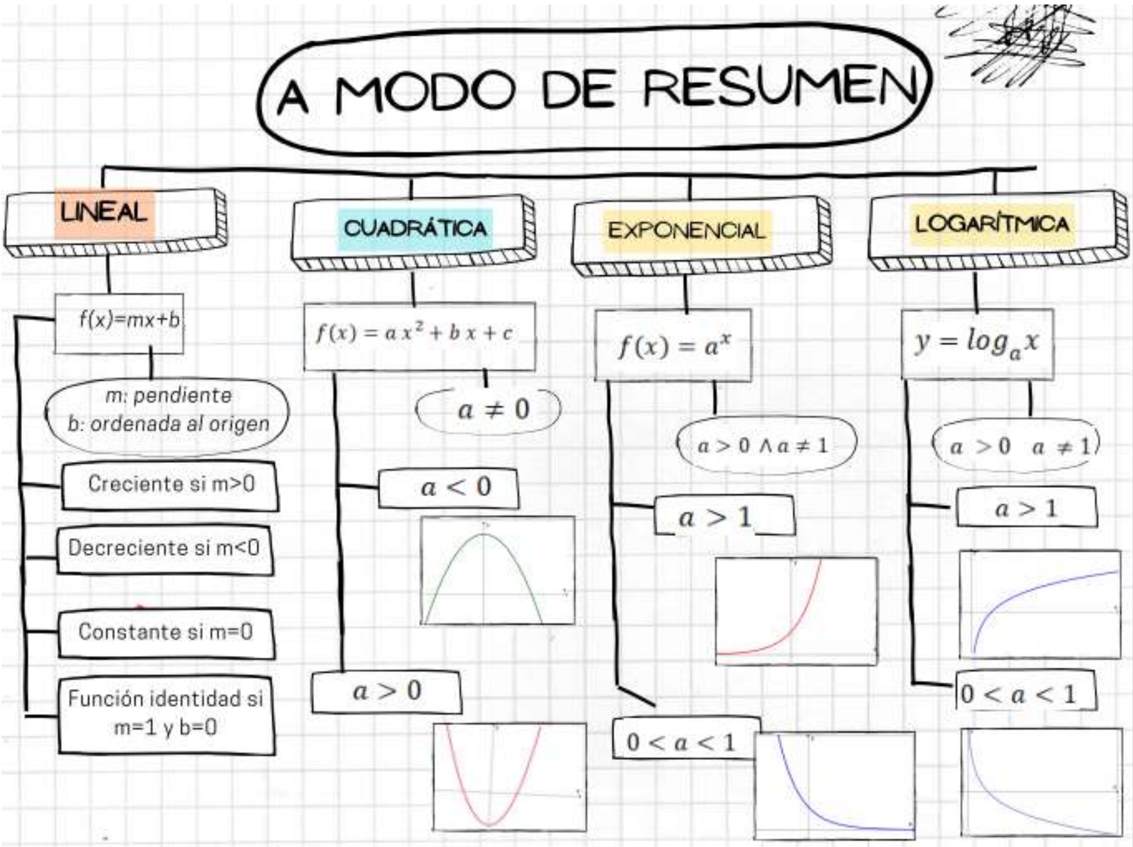
Finalmente analicemos el caso de algunas traslaciones de la gráfica de $y = log\, x$

La gráfica de $y = log(x-2)$ se obtiene a partir de $y = log\, x$; rasladándola dos unidades hacia la derecha.



En el caso de $y = 2 + log\, x$ la traslación es en sentido vertical:





A MODO DE RESUMEN
LINEAL
CUADRÁTICA
EXPONENCIAL
LOGARÍTMICA
$f(x)=mx+b$
m: pendiente
b: ordenada al origen
Creciente si m>0
Decreciente si m<0
Constante si m=0
Función identidad si m=1 y b=0
$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$
$a \neq 0$
$a < 0$
$a > 0$
$f(x) = a^x$
$a > 0 \wedge a \neq 1$
$a > 1$
$0 < a < 1$
$y = log_a x$
$a > 0 \quad a \neq 1$
$a > 1$
$0 < a < 1$

SISTEMA DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

SISTEMA DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

Una ecuación lineal en dos variables es una ecuación del tipo

$$a\,x + b\,y + c = 0 \qquad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Supongamos que queremos encontrar todas las parejas de números cuya suma sea cuatro.

Sin duda *existen infinitas soluciones* para esa ecuación, pero todas están relacionadas mediante la ecuación: $x + y = 4$; con $x, y \in \mathbb{R}$

Algunos pares de valores son los siguientes:

$$x = 2 \text{ e } y = 2;$$

$$x = 3 \text{ e } y = 1;$$

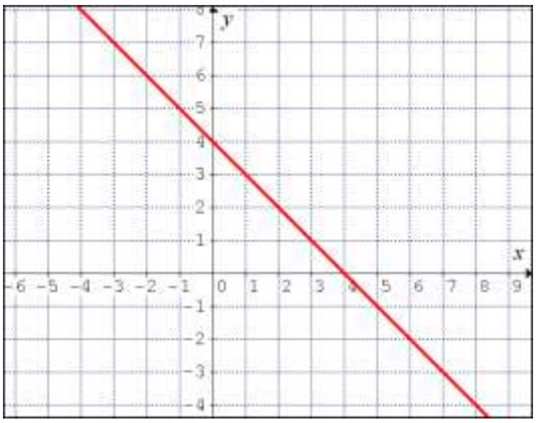
$$x = 4 \text{ e } y = 0; \cdots$$

Es decir, que el conjunto solución de esta ecuación podemos escribirlo como:

$$S = \{(2,2); (3,1); (4,0); \cdots\}, \text{ o bien:}$$

$$S = \{(x, y)/(x, y) \in \mathbb{R} \wedge x + y = 4\}$$

Si representamos estos valores en un plano xy, resulta:



<u>*Conclusión*</u>: Una ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene infinitas soluciones que, representadas gráficamente en un sistema de coordenadas cartesianas, determinan una recta. Cualquier punto de la misma es una solución de la ecuación, y recíprocamente, toda solución de la ecuación corresponde a un punto de la recta .

SISTEMA DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Se llama *sistema de ecuaciones de primer grado,* a un conjunto de *igualdades* algebraicas en las que aparece una o varias *incógnitas* elevadas a la potencia uno. Cada una de estas ecuaciones lineales, o de primer grado, tiene la forma $a\,x + b\,y + cz + \cdots = k$, donde a, b, c, $\cdots$, son los *coeficientes* de la ecuación; x, y, z, $\cdots$; las incógnitas o variables, y k el término independiente (valor constante).

Los sistemas en los que el número de ecuaciones coincide con el de las incógnitas se denominan cuadrados. Un caso particularmente interesante de *sistemas cuadrados* es el de dos ecuaciones con dos incógnitas, que adopta la forma general siguiente:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = k_1 \\ a_2x + b_2y = k_2 \end{cases}$$

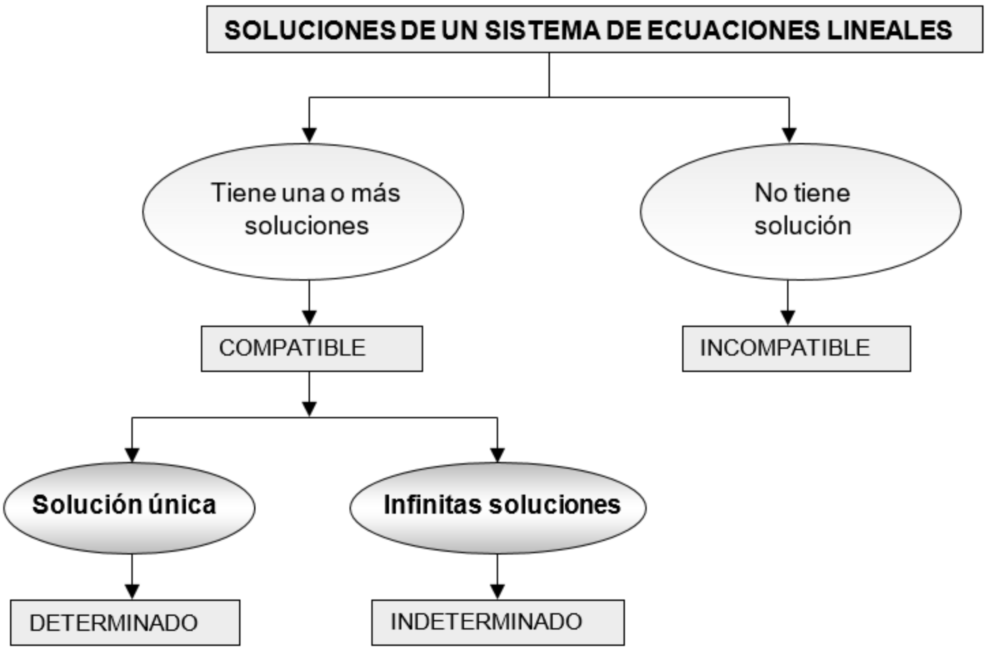
Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, significa hallar los valores de las incógnitas que verifican ambas ecuaciones en simultáneo. Es decir, consiste en encontrar la intersección de los conjuntos solución de ambas ecuaciones.

Si, dado el sistema de ecuaciones anterior, S_1 es el conjunto solución de $a_1x + b_1y = k_1$; y S_2 es el conjunto solución de $a_2x + b_2y = k_2$; entonces $S = S_1 \cap S_2$ es la solución del sistema.
A un sistema de ecuaciones de primer grado también puede llamárselo sistema de ecuaciones lineales

TIPOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En el análisis de un sistema de ecuaciones lineales se pueden presentar varios casos:

- Si el sistema tiene solución, y ésta es única, se denomina ***c**ompatible determinado.*
- Cuando presenta varias soluciones posibles, es *compatible indeterminado*.
- Si no tiene solución, se denomina *incompatible*.



Actividad Nº 15

1. Completa la siguiente tabla:

Ecuación	Coeficiente de x	Coeficiente de y	Término independiente
$3x + y = 2$			
$-x + 2y = 4$			

2. Escribe algebraicamente mediante una ecuación con dos incógnitas los siguientes enunciados:
    a) La suma de dos números es 54.
    b) Un bolígrafo cuesta el doble que un lápiz.
    c) El perímetro de un rectángulo es 30.
    d) Los números x, y, 2 y 3 forman una proporción.
3. Comprueba si los siguientes valores de x e y son solución de las siguientes ecuaciones:
    a) $x = 0, y = 2$ en la ecuación $3x + 7y = 14$.
    b) $x = 1, y = 3$ en la ecuación $-2x + 5y = 3$.
4. Para $x = 1$, halla el valor de y en la ecuación $2(x + 3)y = 3$.
5. Para $y = -3$, halla el valor de x en la ecuación $5(x - 1) + 2(y - 2) = 5$.
6. ¿Puedes obtener dos soluciones distintas para $9x - 4y = 1$? En caso afirmativo resuelve y justifica.
7. La recta que resulta de representar gráficamente las soluciones de la ecuación $2x - 3y = 11$, pasa por el punto:

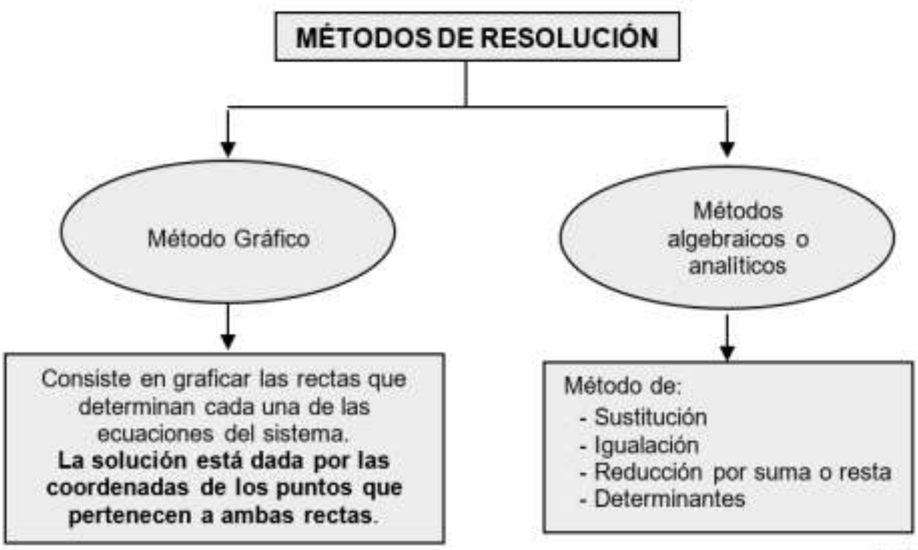
    a) $(0, -4)$ *b*) $(4, -1)$ *c*) $(1, -4)$ *d*) $(0, \frac{11}{3})$

Ahora bien, dos sistemas de ecuaciones lineales que tienen las mismas soluciones son *equivalentes*. En la noción de equivalencia se basan las principales técnicas algebraicas de resolución de estos sistemas, que persiguen convertirlos en otros cuya resolución sea más sencilla.

Recordemos cómo resolvemos un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA LINEAL DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

Existen distintos métodos que no permiten resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.



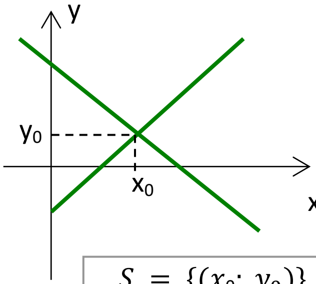
MÉTODO GRÁFICO

Dado un sistema de ecuaciones lineales de dos por dos, como el siguiente:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = k_1 \\ a_2x + b_2y = k_2 \end{cases}$$

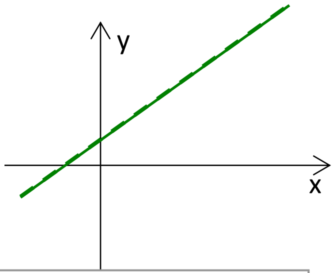
Cada ecuación en el plano, como vimos, corresponde a una función que tiene por gráfica una recta. Las dos rectas pueden ocupar las siguientes posiciones relativas:

a)



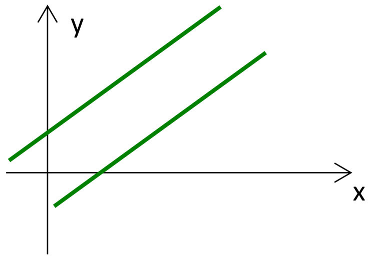
$S = \{(x_0;\ y_0)\}$

b)



$S = \{(x_0;\ mx_0 + b)\}$

c)



$S = \{\,\}$

a) Se cortan en un punto. En ese caso la solución del sistema es el punto común de ambas rectas o punto de intersección: $P(x_0, y_0)$, que expresamos como el conjunto solución $S = \{(x_0, y_0)\}$. El sistema se llama *compatible determinado* y tiene *solución única.*

b) Son rectas coincidentes, en cuyo caso hay infinitos puntos comunes que representan las *infinitas soluciones* del sistema. Para cada valor de x_0, la y toma el valor que corresponda según la ecuación de la recta, es decir $y_0 = m\,x_0 + b$. El sistema se llama *compatible indeterminado* y la solución está dada por $S = \{(x_0; mx_0 + b)\}$.

c) Las rectas son paralelas (aunque toda recta es paralela a sí misma, en todos estos casos consideraremos las rectas paralelas no coincidentes, salvo que se aclare lo contrario) y no se cortan, es decir, no tienen puntos comunes. Por lo tanto *no tiene solución*, o bien, el conjunto solución S es vacío: { }. El sistema se llama *incompatible*.

Ayudémonos de algunos ejemplos para recordar los métodos de resolución propuestos.

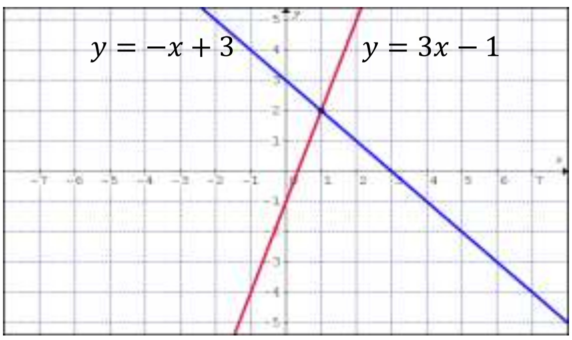
Ejemplo 1: Dado el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, encontremos su solución mediante el método gráfico.

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Despejando y en cada una de las ecuaciones,

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

Gráficamente:



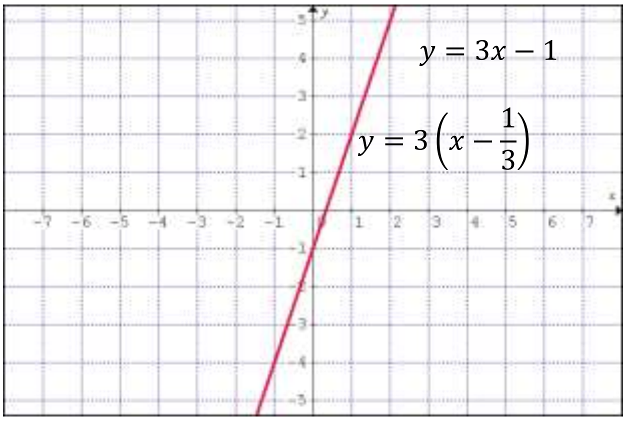
Al representar las rectas, vemos que se intersecan en un solo punto $(1,2)$, por lo tanto, el sistema de ecuaciones lineales propuesto es ***compatible determinado con una solución única***: $S = \{(1,2)\}$.

<u>Ejemplo 2</u>: Dado el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, encontremos su solución mediante el método gráfico.

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x - \frac{1}{3}y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Despejando y en cada una de las ecuaciones,

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right) \end{cases}$$



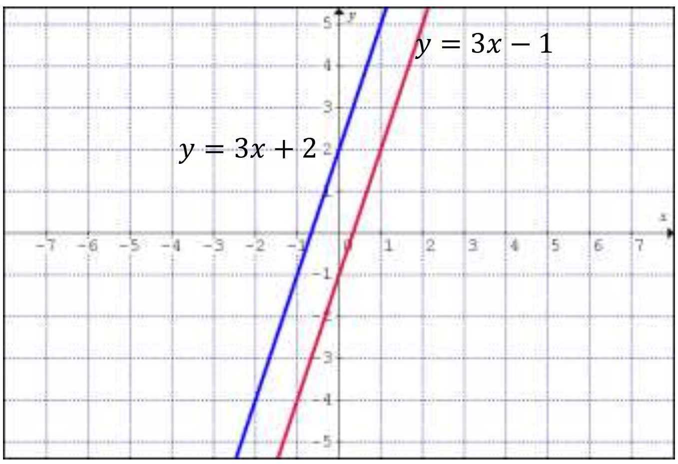
Al representar las rectas, resultan coincidentes, por lo tanto, el sistema de ecuaciones lineales propuesto es ***compatible indeterminado con infinitas soluciones***.

<u>Ejemplo 3</u>: Dado el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, encontremos su solución mediante el método gráfico.

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$$

Despejando y en cada una de las ecuaciones,

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$$



Al representar las rectas, resultan paralelas no coincidentes, por lo tanto, el sistema de ecuaciones lineales propuesto es ***incompatible y no tiene solución***.

MÉTODOS ANALÍTICOS

Desarrollaremos a continuación los cuatro métodos utilizados con más frecuencias para la resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

- **Método de sustitución:** esta técnica algebraica, para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituirla en la otra. Así, se obtiene una sola ecuación con una incógnita. Una vez obtenido el valor de esta incógnita, se sustituye su valor en cualquiera de las ecuaciones del sistema, inicial para calcular el valor de la otra incógnita. Resolvamos el mismo sistema propuesto anteriormente, pero utilizando el método de sustitución.

$$\begin{cases} 3x - y = 1 & (1) \\ x + y = 3 & (2) \end{cases}$$

Recordemos que debemos despejar una de las variables, en una de las ecuaciones, ¿te parece que despejemos y de la ecuación (1)?

$$y = 3x - 1 \quad (3)$$

Sustituyamos ahora el valor obtenido para y en la ecuación (2):

$$x + (3x - 1) = 3$$

Resolvemos ahora la ecuación de primer grado con una incógnita que nos ha quedado y resulta:

$$4x - 1 = 3$$

$$4x = 4$$

$$x = 1$$

Reemplazando ahora el valor obtenido de x en (3), por ejemplo,

$$y = 3\,1 - 1$$

$$y = 2$$

Comprueba que hubieses obtenido el mismo valor para x e y si despejas una de las variables x o y en la ecuación (2), y procedes de la misma manera.

- **Método de igualación:** Este método consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar las expresiones resultantes. Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita obtenida y se sustituye este valor en las ecuaciones iniciales.

  Resolvamos el mismo sistema propuesto anteriormente, pero utilizando el método de igualación.

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Recordemos que debemos despejar una de las variables, ¿te parece que despejemos y en ambas igualdades?,

$$\begin{cases} y = 3x - 1 & (1) \\ y = -x + 3 & (2) \end{cases}$$

Podemos observar que los primeros miembros de ambas ecuaciones son iguales (ambos son y), por lo tanto los segundos miembros también son iguales entre sí, lo que nos permite escribir:

$$3x - 1 = -x + 3$$

Resolvemos ahora la ecuación de primer grado con una incógnita que nos ha quedado y resulta:

$$4x - 1 = 3$$

$$4x = 4$$

$$x = 1$$

Reemplazando el valor de x en (1) por ejemplo,

$$y = 3\ 1 - 1$$

$$y = 2$$

Comprueba que hubieses obtenido el mismo valor de y si reemplazas el valor de x en la expresión (2).

- **Método de reducción por sumas y restas:** la tercera técnica algebraica de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, consta de los siguientes pasos:
  - ✓ Se multiplican o dividen los miembros de las dos ecuaciones por los números que convengan para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas.
  - ✓ Se suman (o se restan) las dos ecuaciones resultantes, con lo que se elimina una incógnita.
  - ✓ Se resuelve la ecuación con una incógnita obtenida, y se sustituye su valor en cualquiera de las ecuaciones iniciales para calcular la otra incógnita.

Resolvamos el mismo sistema propuesto anteriormente, pero utilizando el método de reducción.

$$\begin{cases} 3x - y = 1 & (1) \\ x + y = 3 & (2) \end{cases}$$

En este caso bastará multiplica por tres la segunda ecuación para igualar los coeficientes de x. El sistema, equivalente al dado, tiene las mismas soluciones.

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 3x + 3y = 9 \end{cases}$$

Restando miembro a miembro las ecuaciones obtenidas, podremos cancelar la variable x con su coeficiente y obtenemos:

$$3x - y - 3x - 3y = 1 - 9$$

por propiedad cancelativa:

$$-y - 3y = 1 - 9$$

Resolviendo:

$$-4y = -8$$

dividiendo ambos miembros por $-\ 4$;

$$y = 2$$

Para calcular el valor de x puede aplicarse nuevamente el método, o simplemente sustituir este valor encontrado en una de las ecuaciones del sistema. Por ejemplo, reemplazando en la ecuación (2) y por su valor dos, resulta:

$$x + 2 = 3$$

y resolviendo la ecuación lineal resultante:

$$x = 1$$

Como ves, hemos obtenido la solución del sistema: $\boldsymbol{S} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{2})\}$

Para completar nuestro estudio te proponemos las siguientes actividades, a fin de investigar si existen otras maneras de resolver este sistema, pero con un procedimiento distinto.

- Si hubieras *dividido por tres* la primera ecuación, ¿hubieras obtenido coeficientes iguales en x para poder aplicar este método?
- Si hubieras *sumado miembro a miembro* estas expresiones, ¿habrías logrado reducir una de las incógnitas?

Resuelve y justifica tus respuestas.

• **Método de determinantes:** Antes de comenzar con la aplicación del método para la resolución del sistema de ecuaciones, recordemos algunos conceptos importantes.

Si a, b, c y d son cuatro números reales, dispuestos de la siguiente manera:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Recibe el nombre de determinante de dos por dos el número que resulta de resolver $a\,d - b\,c$, lo que podemos esquematizar de la siguiente manera:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c$$

Evaluemos por ejemplo el siguiente determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$$

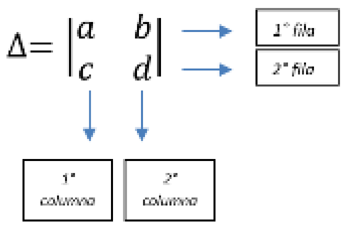
$$\Delta = 3\,1 - 6\,(-2)$$

$$\Delta = 15$$

¿Estás de acuerdo con ese resultado? Los elementos a y b, pertenecen a la primera fila del determinante dado, y los elementos c y d a la segunda.

Son elementos de la 1ª columna a y c, y de la segunda, b y d.

En el siguiente esquema, se visualiza lo dicho:



¿Cómo se aplican estos conceptos de determinantes en la resolución de un SEL?

Dado un sistema de ecuaciones lineales (SEL) $2x2$ (dos ecuaciones con dos incógnitas) como el siguiente:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = k_1 \\ a_2 x + b_2 y = k_2 \end{cases}$$

Se forma *el determinante del sistema* con los coeficientes de las incógnitas ordenados, y completando con ceros cuando falte alguno. Llamamos a este determinante Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Es decir que:

- La *fila 1* corresponde a los coeficientes de la *ecuación 1*.
- La *fila 2* corresponde a los coeficientes de la *ecuación 2.*
- La *columna 1* corresponde a los coeficientes de la incógnita $x.$
- La *columna 2* corresponde a los coeficientes de la incógnita y.

Si este determinante es distinto de cero, el SEL es compatible determinado y por lo tanto tiene solución única.

$\Delta = a_1\, b_1 - a_2\, b_2 \neq 0$ → SEL compatible determinado (con solución única)

Sabiendo que tiene solución, procedemos de la siguiente manera:

Se forman los determinantes de las incógnitas, Δx y Δy reemplazando la columna de la incógnita correspondiente, por los términos independientes (k_1, k_2) y dejando la otra columna sin modificar:

Para la x, es $\Delta x = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix} = k_1\, b_2 - k_2\, b_1$

Para la y, es $\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix} = a_1\, k_2 - k_1\, a_2$

Cada incógnita es igual al cociente entre su determinante y el determinante del sistema:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}\,;\, y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

En nuestro ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

El determinante Δ del sistema es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\ 1 - 1(-1) = 4$$

$\Delta \neq 0$ → SEL compatible determinado

Sabiendo que tiene solución, calculamos los otros dos determinantes:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\ 1 - 3\ (-1) = 4$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\ 3 - 1\ 1 = 8$$

Dijimos que cada incógnita es igual al cociente entre su determinante y el determinante del sistema:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1 \; ; \; y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{8}{4} = 2$$

Que es la solución que ya conocemos $\boldsymbol{S} = \{(\mathbf{1};\ \mathbf{2})\}$

Actividad Nº 16

Te proponemos que estudies la solución del siguiente sistema, utilizando determinantes.

$$\begin{cases} -x + 3y = 5 \\ 2x - 6y = 10 \end{cases}$$

Justifica cada uno de tus resultados.

El siguiente cuadro resumen te será muy útil para decidir la compatibilidad del sistema, utilizando determinantes.

SISTEMA DE ECUACIONES

- COMPATIBLE
  Admite solución
  - COMPATIBLE determinado
    - La solución es única
    - Gráficamente las rectas se cortan en un punto.
    - Se cumple $\Delta \neq 0$.
  - COMPATIBLE indeterminado
    - Tiene infinitas soluciones
    - Gráficamente las rectas son coincidentes (todo punto de la recta es solución de ambas ecuaciones)
    - Se cumple $\Delta = 0$; $\Delta x = 0$ y $\Delta y = 0$
    - Al resolver el sistema se llega a expresiones tales como $0x = 0$ que es válida para
- INCOMPATIBLE
  No admite solución
  - gráficamente las rectas son paralelas.
  - Se cumple $\Delta = 0$; $\Delta x \neq 0$; $\Delta y \neq 0$
  - Al resolver el sistema se llega a expresiones tales como $0x = 8$ que no es válida para ningún

Resolución de problemas

Uno de los objetivos fundamentales de este curso, consiste en que seas capaz de reconocer situaciones problemáticas, formularlas mediante expresiones matemáticas y resolverlas usando los algoritmos correspondientes.

En todos los temas abordados has tenido la oportunidad de enfrentar situaciones problemáticas, que resultan mucho más ricas que la aplicación mecánica de un algoritmo, además de ayudarte a desarrollar los criterios que necesitarás en tu vida profesional.

Al resolver un problema de esta unidad, deberás realizar el planteo de un sistema de ecuaciones lineales que represente la situación dada y luego resolver por el método que prefieras. Para resolver problemas de SEL, después de asegurarte que comprendiste bien el enunciado, es útil seguir las siguientes pautas:

- Identificar las variables (o incógnitas) del problema, asociándole un nombre a cada una.
- Plantear el problema, entendiendo su enunciado y convirtiéndolo en ecuaciones con coeficientes, constantes y variables o incógnitas.
- Analizar el tipo de sistema que se obtiene.
- Elegir un método de resolución (algebraico o gráfico) y aplicarlo.
- Estudiar si las soluciones obtenidas son pertinentes en el contexto del problema.
- Comprobar las soluciones en las ecuaciones planteadas.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1: En un curso de 30 alumnos hay 2 varones más que mujeres. ¿Cuántos varones y cuántas mujeres hay?

Identifiquemos las variables (o incógnitas) que participan en esta situación:

→ Número de varones, que podemos identificar con la variable y.

→ Número de mujeres, que nombraremos con x.

Con los datos que tenemos, podemos escribir las siguientes ecuaciones:

→ El total de alumnos del curso es 30, lo que significa que la suma del número de varones y mujeres es 30. De acuerdo con nuestras variables podemos escribir: $x + y = 30$.

→ Además, hay 2 varones más que mujeres, es decir, nº de varones = nº de mujeres + 2; o bien, nº de mujeres = nº de varones – 2. Lo que se puede simbolizar como: $y = x + 2$, o bien $x = y - 2$. Agrupando las variables en el primer miembro, escribimos $y - x = 2$, o bien $x - y = -2$.

En virtud de las ecuaciones, escribimos el sistema ordenado convenientemente:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

Estudiemos el sistema de ecuaciones para asegurarnos que es compatible, calculando el determinante del sistema Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\,(-1) - 1\,1 = -2$$

$$\Delta \neq 0 \text{ (sistema compatible determinado)}$$

El método elegido para resolverlo es determinantes por lo tanto, calculemos Δx y Δy.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 30 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 30\,(-1) - (-2)\,1 = -28$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 30 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1\,(-2) - 1\,30 = -32$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-28}{-2} = 14; \; y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-32}{-2} = 16$$

Recordemos que nuestro acuerdo fue: varones, identificados con la variable y; mujeres, con x, por lo tanto la respuesta obtenida es:

Respuesta: El número de varones del curso es 16, mientras que el de mujeres es 14.

Estudiemos las soluciones obtenidas para constatar si son pertinentes en el contexto del problema.

De acuerdo a la situación planteada el total de alumnos del curso es de treinta, es decir que la suma del número de alumnos varones y mujeres debe coincidir con él. Recurriendo a nuestras respuestas, número de alumnos varones (16) más número de alumnas mujeres (14) es igual a treinta. Pero además debe verificarse simultáneamente que el número de varones supera en dos al de mujeres, $(16 - 14 = 2)$.

En símbolos, resulta:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ x - y = -2 \end{cases} \text{ si } x = 14; y = 16 \rightarrow \begin{cases} 14 + 16 = 30 \\ 14 - 16 = -2 \end{cases}$$

Hemos comprobado que los valores obtenidos verifican al sistema, por lo tanto, podemos asegurar que nuestra situación problemática ha sido correctamente resuelta.

GEOMETRÍA

GEOMETRÍA

La Geometría, del griego *geō*, "tierra"; *metrein*, "medir", es la rama de la Matemática que se ocupa de las propiedades del espacio. En su forma más elemental, la geometría se preocupa de problemas métricos como el cálculo del área y diámetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos.

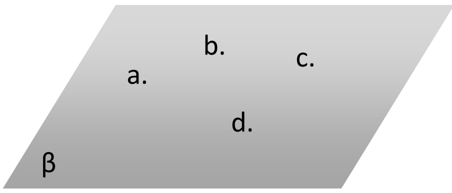
Para comenzar, es necesario que recordemos cuales son los conceptos considerados primitivos, y los axiomas o postulados que satisfacen estos elementos geométricos y que se aceptan sin demostrar.

PUNTO, RECTA Y PLANO: RELACIONES FUNDAMENTALES

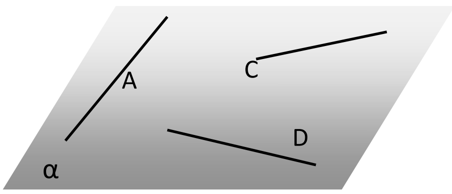
La geometría se basa en tres **conceptos fundamentales o conceptos primitivos** que se aceptan sin definirlos y que forman parte del **espacio geométrico**, o sea el conjunto formado por todos los puntos:

- ***Plano:*** se representa con una porción del mismo y se lo designa con una letra griega.

- ***Punto:*** se representa con un pequeño punto y se lo designa con una letra de imprenta minúscula.



- ***Recta:*** se representa con una porción de la misma y se la designa con una letra de imprenta mayúscula.

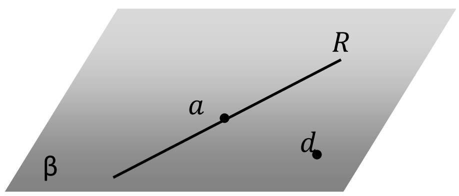


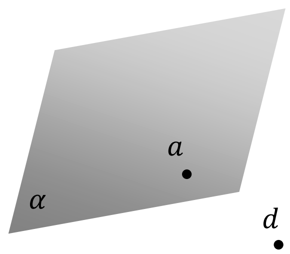
RELACIONES FUNDAMENTALES

Identificados los conceptos primitivos y sus respectivos símbolos, también es de suma importancia, tener presente que existen **relaciones fundamentales,** que se señalan con símbolos específicos. A continuación, repasamos los símbolos presentados en el primer módulo para vincular un elemento con un conjunto o dos conjuntos entre sí, puesto que nos serán útiles para relacionar los conceptos primitivos.

RELACIÓN ENTRE UN ELEMENTO Y UN CONJUNTO		RELACIÓN ENTRE DOS CONJUNTOS	
Se simboliza	Significa	Se simboliza	Significa
$\boldsymbol{a \in A}$	El elemento a pertenece al conjunto A.	$A \subset B$	El conjunto A está incluido (o es una parte) del conjunto B.
$\boldsymbol{a \notin A}$	El elemento a no pertenece al conjunto A.	$A \not\subset B$	El conjunto A no está incluido en el conjunto B.

- Los puntos, por ser elementos, **pertenecen** (o no) a las rectas y a los planos, relación que representamos en la siguiente figura.





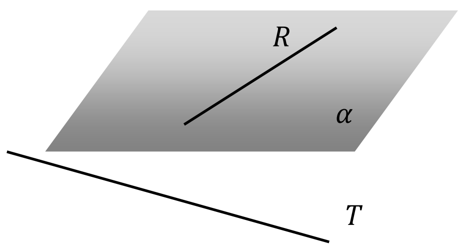
$a \in R$ (el punto a pertenece a la recta R)

$d \notin R$ (el punto d no pertenece a la recta R)

$a \in \alpha$ (el punto a pertenece al plano α)

$d \notin \alpha$ (el punto d no pertenece al plano α)

- Las rectas, por ser **conjuntos** de puntos, están **incluidas** en los planos, relación que se muestra en la figura.



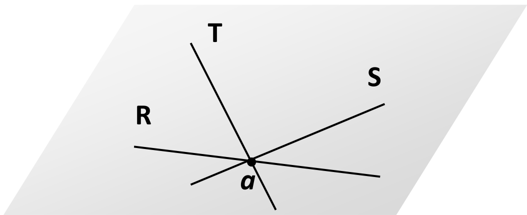
$R \subset \alpha$ (la recta R está incluida en el plano α)

$T \not\subset \alpha$ (la recta T no está incluida en el plano α)

POSTULADOS DEL PUNTO, LA RECTA Y EL PLANO

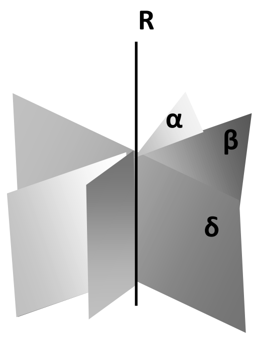
Se llaman *postulados* o *axiomas* a aquellas propiedades que satisfacen los elementos geométricos, que se aceptan sin demostrar. Estos axiomas o postulados, que enunciamos a continuación, nos sirven para dar definiciones de nuevos conceptos o para demostrar otras propiedades, no tan evidentes, llamadas teoremas.

1. Existen infinitos puntos, infinitas rectas e infinitos planos.
2. Por un punto pasan infinitas rectas, ya que todo punto pertenece a infinitas rectas



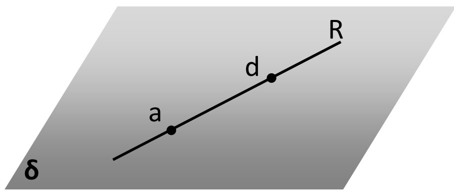
Por ejemplo:
$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}$
$\boldsymbol{a} \in \mathbf{T}$
$\boldsymbol{a} \in \mathbf{S}$

3. Por una recta pasan infinitos planos, ya que toda recta está incluida en infinitos planos.

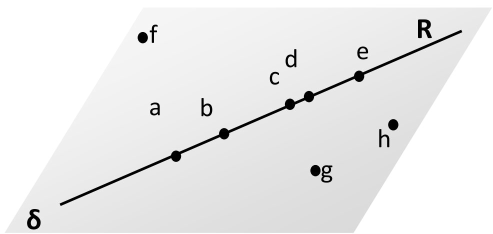


Por ejemplo:
$\mathbf{R} \subset \boldsymbol{\alpha}$
$\mathbf{R} \subset \boldsymbol{\beta}$
$\mathbf{R} \subset \boldsymbol{\delta}$

4. Dados dos puntos, existe una y sólo una recta a la cual pertenecen.



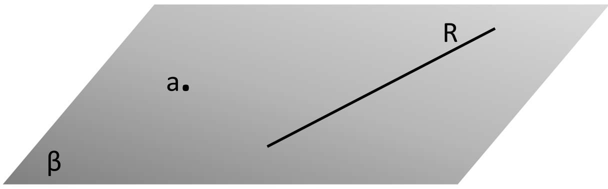
5. A una recta pertenecen infinitos puntos y existen también infinitos puntos que no pertenecen a ella.



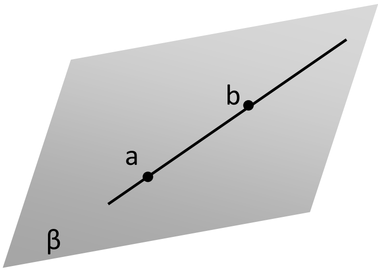
Por ejemplo:
$\mathbf{a} \in \mathbf{R}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}$, $\mathbf{d} \in \mathbf{R}$,

mientras que
$\mathbf{h} \notin \mathbf{R}$ $\mathbf{g} \notin \mathbf{R}$ $\mathbf{f} \notin \mathbf{R}$.

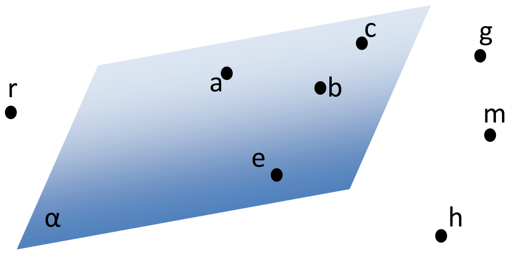
6. Dada una recta y un punto fuera de ella existe sólo un plano de modo que el punto pertenece al mismo y la recta está incluida en él.



7. La recta que determinan dos puntos de un plano, está incluida en dicho plano. También puede enunciarse como: Dos puntos que pertenecen en un plano determinan una recta que está incluida en el plano.



8. A un plano pertenecen infinitos puntos y existen también infinitos puntos que no pertenecen a él.



$\mathbf{a} \in \boldsymbol{\alpha}$
$\mathbf{b} \in \boldsymbol{\alpha}$
$\mathbf{c} \in \boldsymbol{\alpha}$
$\mathbf{e} \in \boldsymbol{\alpha}$
$\mathbf{g} \notin \boldsymbol{\alpha}$
$\mathbf{h} \notin \boldsymbol{\alpha}$
$\mathbf{m} \notin \boldsymbol{\alpha}$
$\mathbf{r} \notin \boldsymbol{\alpha}$

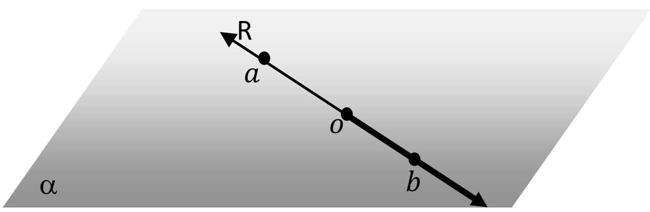
Semirrecta

Todo punto perteneciente a una recta separa a la misma en dos partes, cada una de ellas recibe el nombre de **semirrecta**.

Al punto que da lugar a las dos semirrectas opuestas se lo llama **origen de las semirrectas**.

Para diferenciar las semirrectas se determinan dos puntos adicionales distintos del origen, cada uno de los cuales pertenece a cada semirrecta:

- Semirrecta de origen o que contiene al punto a. Se escribe $\overrightarrow{oa}$.
- Semirrecta de origen o que contiene al punto b. Se escribe $\overrightarrow{ob}$.



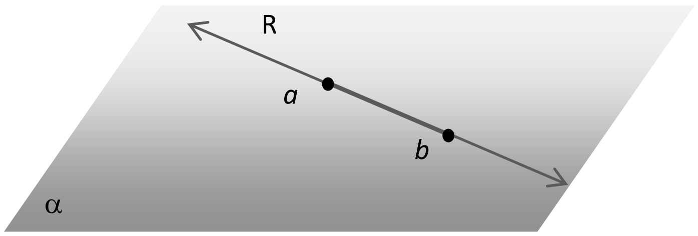
Características de las semirrectas

- Todo punto de una recta pertenece a una de las dos semirrectas o coincide con el origen.
- Dos semirrectas opuestas sólo tienen en común el punto de origen.
- Uniendo los puntos de dos semirrectas opuestas se obtiene la recta que las contiene.

SEGMENTO

Dados dos puntos a y b, se llama **segmento** $\overline{ab}$ a la intersección de la semirrecta de origen **a** que contiene al punto **b** y la semirrecta de origen **b** que contiene al punto **a**.

Los puntos **a** y **b** se denominan **extremos** del segmento.

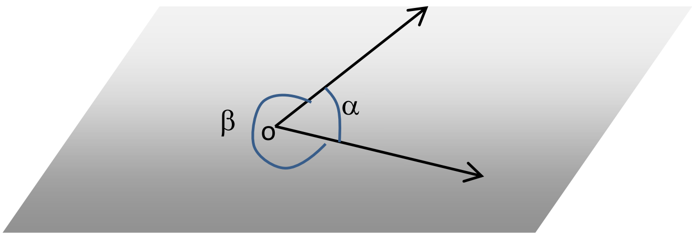


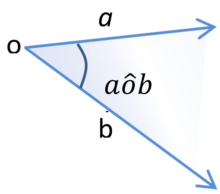
$\vec{ab} \cap \vec{ba} = \overline{ab}$

ÁNGULOS

Dado un plano y dos semirrectas en él con el mismo origen, determinan dos regiones en el mismo que llamamos ángulos.

Las semirrectas que forman parte del borde del ángulo se llaman lados del ángulo.

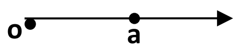




Como se aprecia en el gráfico precedente, algunas maneras de simbolizar los ángulos son con letras griegas (α, β, etc.) o, si tenemos en cuenta las semirrectas con un mismo origen, por ejemplo $\widehat{aob}$ o simplemente ô.

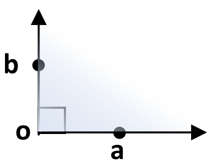
ALGUNOS ÁNGULOS ESPECIALES:

- Ángulo nulo: es el ángulo definido por dos semirrectas coincidentes.



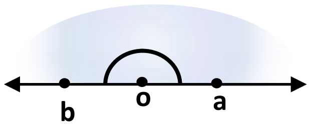
$\widehat{\mathrm{aoa}} \to \textit{ángulo nulo}$

- Ángulo recto: es el ángulo definido por dos semirrectas perpendiculares.



$\widehat{\mathrm{boa}} \to \textit{ángulo recto}$

- Ángulo llano: es aquel cuyos lados son semirrectas opuestas. Barre un semiplano, esto es, la mitad del plano.



$\widehat{\mathrm{boa}} \rightarrow \acute{a}ngulo\ llano$

UNIDADES ANGULARES

El sistema de medición de ángulos que utilizaremos, se llama sexagesimal. La unidad de medida de amplitud de los ángulos se llama grado, y resulta de dividir un ángulo recto en 90 partes iguales, por lo tanto, un ángulo recto mide 90°.

Todos los ángulos rectos tienen igual amplitud. La medida de todo ángulo llano es igual a la medida de dos ángulos rectos.

Este sistema de medición de ángulos, se llama **sexagesimal** porque cada unidad menor al grado se divide en 60 partes para obtener la siguiente:

1 minuto=$\frac{1°}{60} = 1´$

1 segundo =$\frac{1´}{60} = 1´´$

Nota: Existen otros sistemas de medición de ángulos, algunos de ellos son sistema radial y sistema centesimal entre muchos más. En el capítulo de Trigonometría abordaremos el sistema radial

Notación

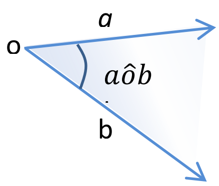
Si bien hay diferentes notaciones para la identificación de los ángulos, y para referirse a la medida de los mismos; para evitar confusiones, hemos unificado la notación conforme al siguiente criterio:

Cuando escribamos, por ejemplo, $\hat{a}$, $\widehat{aob}$, $\hat{\alpha}$ estaremos refiriéndonos a las regiones del plano que hemos denominado con esas letras. En cambio, cuando escribamos simplemente a, aob, α, por ejemplo, estaremos refiriéndonos a la **medida** de los ángulos.

CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS

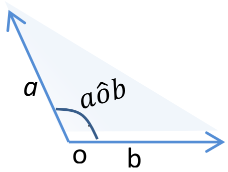
1. **Ángulos agudos**: Son aquellos ángulos cuya amplitud es menor a la amplitud de un ángulo recto.

   $0° < \mathrm{aob} < 90°$

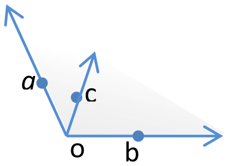


2. **Ángulos obtusos**: Son aquellos ángulos cuya amplitud es mayor a la amplitud de un ángulo recto y menor a un llano.

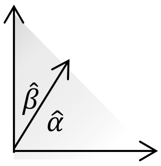
   $90° < \mathrm{aob} < 180°$



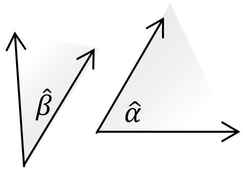
3. **Ángulos consecutivos:** son aquellos que tienen en común un lado.



4. **Ángulos complementarios:** dos ángulos lo son cuando la suma de sus amplitudes es igual a la medida de un ángulo recto.



$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son ángulos complementarios consecutivos



$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son ángulos complementarios no consecutivos

En ambos casos; $\alpha + \beta = 90°$; *entonces* $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son complementarios.

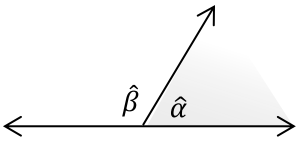
Si $\alpha + \beta = 90°$ → $\alpha = 90° - \beta$

→ $\beta = 90° - \alpha$

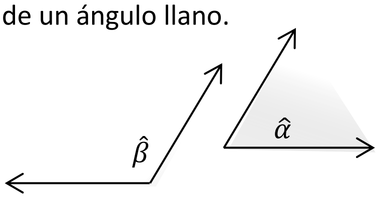
Como un ejemplo:

- ✓ Si $\alpha = 34°$ y $\beta = 56°$, entonces $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son complementarios porque $\alpha + \beta = 34° + 56° = 90°$.
- ✓ Si $\alpha = 29°$ y $\hat{\beta}$ es su complemento, entonces $\beta = 90° - 29° \rightarrow \beta = 61°$.

5. **Ángulos suplementarios:** dos ángulos lo son cuando la suma de las medidas de sus amplitudes es igual a la medida de la amplitud de un ángulo llano.



$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son ángulos suplementarios consecutivos



$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son ángulos suplementarios no consecutivos

En ambos casos, $\alpha + \beta = 180° \rightarrow \hat{\alpha}$ *y* $\hat{\beta}$ son suplementarios.

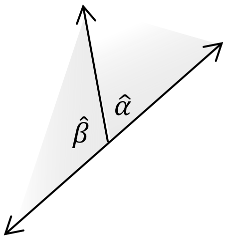
Si $\alpha + \beta = 180°$ → $\alpha = 180° - \beta$

→ $\beta = 180° - \alpha$

Como un ejemplo:

- ✓ Si $\alpha = 63°$ y $\beta = 117°$, entonces $\hat{\alpha}\ y\ \hat{\beta}$ son suplementarios pues $\alpha + \beta = 63° + 117° = 180°$.
- ✓ Si $\alpha = 78°$ y $\hat{\beta}$ es su suplemento → $\beta = 180° - 78°$, entonces $\beta = 102°$.

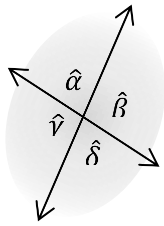
6. **Ángulos adyacentes:** dos ángulos lo son cuando tienen un lado en común y el otro lado está formado por dos semirrectas opuestas.



Los ángulos adyacentes son siempre suplementarios, ya que la suma de las medidas de sus amplitudes es igual a la amplitud de un ángulo llano.

Si dos ángulos adyacentes son congruentes, ambos son ángulos rectos.

7. **Ángulos opuestos por el vértice:** dos ángulos lo son cuando sus lados son semirrectas opuestas.

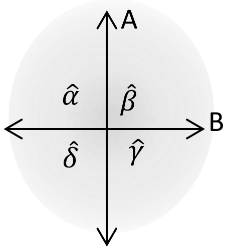


$\left.\begin{matrix}\widehat{\beta}\ \mathrm{y}\ \widehat{\gamma}\\ \widehat{\alpha}\ \mathrm{y}\ \widehat{\delta}\end{matrix}\right\}$ **Opuestos por el vértice**

Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

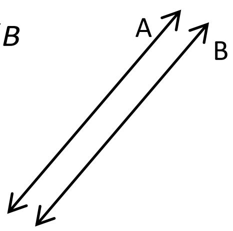
Posiciones relativas de dos rectas incluidas en un plano

- **Rectas perpendiculares.** Dos rectas son perpendiculares cuando al cortarse determinan cuatro ángulos iguales. En el gráfico siguiente, las rectas A y B son perpendiculares (se escribe A ⊥ B)

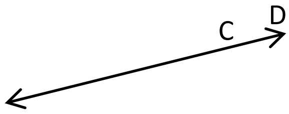


- **Rectas paralelas**. Dos rectas son paralelas cuando no tienen ningún punto en común, o cuando son coincidentes.

$A//B$



$C//D$



Si dos rectas del plano no son perpendiculares ni paralelas, se dice que son oblicuas.

PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS.

Supongamos que tenemos que resolver una situación como la siguiente: *"Las alturas aproximadas del monte Everest y del Aconcagua, cuya diferencia es 2000 m, guardan entre si la relación $\frac{9}{7}$. Calcular dichas alturas".*

Analicemos la situación y extraigamos los datos:

- Llamaremos H_E y H_A a las medidas de las alturas del Everest y del Aconcagua respectivamente.
- La diferencia de alturas es 2000 m, lo cual en lenguaje simbólico resulta: $H_E - H_A = 2000$.
- La relación que guardan las alturas es de $\frac{9}{7}$ ¿cómo escribimos ese dato en forma simbólica? La expresión es equivalente a "la **razón** entre esas medidas es $\frac{9}{7}$". Luego, en lenguaje simbólico resulta: $\frac{H_E}{H_A} = \frac{9}{7}$.

Si aún no puedes escribir esa relación es muy importante que revises el concepto de razón y proporción.

Ahora con todas las nociones necesarias podemos completar nuestros datos

Datos: $\begin{cases} H_E - H_A = 2\,000 \\ \frac{H_E}{H_A} = \frac{9}{7} \end{cases}$

Incógnitas: $\begin{cases} H_E \\ H_A \end{cases}$

Solución: Para resolver este sistema se puede utilizar, por ejemplo, el método de sustitución, visto anteriormente.

Así, utilizando la propiedad fundamental de las proporciones en la segunda igualdad propuesta en los datos:

$$7H_E = 9H_A$$

Despejando:

$$H_E = \frac{9}{7}H_A,$$

Por lo tanto, si reemplazamos en la otra relación dada en los datos y resolvemos,

$$\frac{9}{7}H_A - H_A = 2000$$

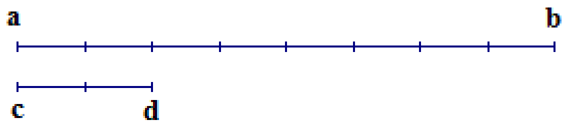
$$H_A = 7000$$

Por lo tanto, podemos construir nuestra respuesta diciendo que la altura del monte **Aconcagua** es de **7000m**; y en consecuencia la altura del **Everest** es de **9000m**.

Hemos trabajado con la altura de dos montes, es decir, hemos utilizado la medida de las longitudes de esos montes.

Facilitemos la situación y supongamos que ahora la propuesta es la siguiente:

Dos segmentos tienen las siguientes longitudes:



Si llamamos $\overline{\mathrm{ab}}$ al primer segmento y $\overline{\mathrm{cd}}$ al segundo; y la unidad de medida elegida es el centímetro escribimos $\mathrm{ab} = 8\mathrm{cm}$ y $\mathrm{cd} = 2\mathrm{cm}$ ¿Cuál es la **razón** entre la medida del segmento $\overline{\mathrm{ab}}$ respecto del segmento $\overline{\mathrm{cd}}$?[1]

¿Se conserva la razón si invertimos el orden de los segmentos dados?

¿Qué significado tiene cada una de las relaciones obtenidas?

Respondamos a nuestra primera pregunta

$\frac{ab}{cd} = \frac{8}{2} = 4$, **la razón es 4.**

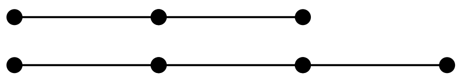
Para la segunda pregunta la respuesta es **no,** puesto que la **razón** sería: $\frac{cd}{ab} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$**.**

En el primer caso, la respuesta indica que la medida del segmento $\overline{\mathrm{ab}}$ es cuatro veces la medida del segmento $\overline{\mathrm{cd}}$, mientras que en el segundo caso la medida del segmento tomado en primer término $\overline{\mathrm{cd}}$ es la cuarta parte de la medida del segmento tomado en segundo término $\overline{\mathrm{ab}}$.

SEGMENTOS PROPORCIONALES

Llamamos razón $\boldsymbol{r}$ entre el segmento $\overline{\mathrm{ab}}$ y el segmento $\overline{\mathrm{cd}}$, al cociente entre sus medidas dadas en la misma unidad.

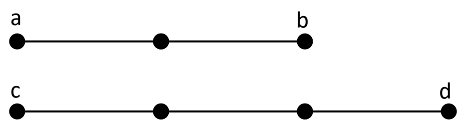
$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{cd}} = \frac{2}{3}$



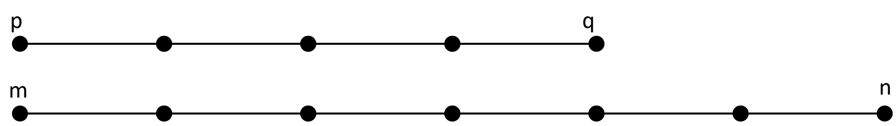
Dos segmentos $\overline{\mathrm{ab}}$ y $\overline{\mathrm{cd}}$ son proporcionales a otros dos $\overline{\mathrm{pq}}$ y $\overline{\mathrm{mn}}$, si la razón de las medidas de los dos primeros segmentos es igual a la razón de las medidas de los segundos segmentos

Es decir;

$$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{cd}} = \frac{2}{3}$$



$$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{pq}}{\mathrm{mn}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$



[1] Cuando escribamos, por ejemplo, $\overline{ab}$, estaremos refiriéndonos al segmento que tiene por extremos los puntos a y b. En cambio, cuando escribamos simplemente ab, por ejemplo, estaremos refiriéndonos a la medida del segmento referido. Con frecuencia usaremos una frase como *el segmento ab de 30 cm* para indicar un segmento cuya medida es 30cm.

Como puede observarse los segmentos no son congruentes pero las razones son iguales. Es decir, en el primer caso la medida del segmento $\overline{ab}$ es $\frac{2}{3}$ del segmento $\overline{cd}$, y en el segundo también la medida del segmento $\overline{pq}$ es $\frac{2}{3}$ de la medida del segmento $\overline{mn}$. En consecuencia, ***los segmentos son proporcionales*** y escribimos:

$$\frac{ab}{cd} = \frac{pq}{mn}$$

Analicemos el siguiente ejemplo:

Dados los segmentos $ab = 30\ cm$, $cd = 150\ cm$, $pq = 100\ cm$ y $mn = 500\ cm$, ¿son ***proporcionales*** los segmentos $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ con respecto a los segmentos $\overline{pq}$ y $\overline{mn}$?

La situación nos propone solamente que digamos si estos segmentos, tomados de a pares, son proporcionales. Aplicando lo visto, bastará con que las razones entre sus medidas sean iguales, para dar la respuesta. Proponemos la proporción:

$$\frac{ab}{cd} = \frac{pq}{mn}$$

Reemplazamos ahora por las medidas correspondientes:

$$\frac{30}{150} = \frac{100}{500}$$

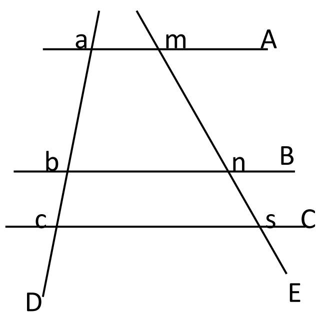
Es decir, $\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$. Por lo tanto, obtenemos que los segmentos son proporcionales, puesto que los segmentos $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$; y los segmentos $\overline{pq}$ y $\overline{mn}$, guardan la misma proporción.

Estas conclusiones nos ayudan a interpretar el ***Teorema de Thales***[2] que enunciamos así:

"Dadas tres o más rectas paralelas intersecadas por dos rectas transversales, la razón entre las medidas de dos segmentos cualesquiera determinadas sobre una de las transversales es igual a la razón de las medidas de los segmentos correspondientes determinados en la otra recta transversal".

Observemos el gráfico. En él, las rectas A, B y C son paralelas, y las rectas D y E son transversales. Recordando que al intersecarse dos rectas queda determinado un punto, podemos llamar a la intersección de cada paralela con las transversales D y E: **a**, **b**, **c** y **m, n, s** respectivamente. Además dos puntos de una recta, determinan un segmento, por lo tanto sobre la transversal D nos han quedado determinados los segmentos $\overline{ab}$ y $\overline{bc}$; y sobre la transversal E los segmentos $\overline{mn}$ y $\overline{ns}$**.** Entre sus las medidas de sus longitudes se puede establecer la siguiente relación que constituye la tesis del teorema de Thales:

$$\frac{ab}{bc} = \frac{mn}{ns}$$



2 El filósofo y matemático griego Thales de Mileto fue uno de los siete sabios más grandes de la antigüedad. El teorema de Thales, llamado así en su memoria, es una parte fundamental en el estudio de la semejanza. A él se debe una de las numerosas aplicaciones que tiene la semejanza, que es la determinación de la distancia entre dos puntos inaccesibles entre sí; para ello se dice que calculó la altura de una de las pirámides de Egipto sin medirla directamente, basándose en la longitud de la sombra de su bastón; así logró realizar una brillante triangulación.

Prestando atención al gráfico, también están determinados los segmentos $\overline{ac}$ y su correspondiente $\overline{ms}$. ¿Cumplirán ellos también con la propiedad enunciada? Si la respuesta es sí, ¿cómo quedan expresadas las proporciones?

Cuando expresamos esta propiedad, dijimos ***"la medida de la longitud de los segmentos determinados sobre una de las transversales y los correspondientes de la otra transversal forman una proporción"***. Es decir que la longitud del segmento $\overline{ab}$, se corresponde con la longitud del segmento $\overline{mn}$, por lo tanto podríamos formar otras proporciones teniendo en cuenta siempre la correspondencia entre las longitudes de los segmentos determinados.

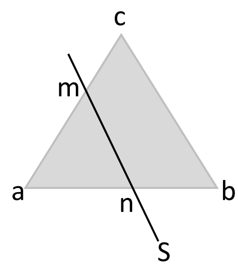
Para contestar a nuestra pregunta, una de las posibilidades es:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{ms}{ns}$$

Teniendo en cuenta el gráfico se pueden plantear otras proporciones más.

COROLARIO DEL TEOREMA DE THALES

Toda recta paralela a un lado de un triángulo determina con los otros dos lados (o su prolongación) segmentos proporcionales.



En la figura tenemos un triángulo abc, y se ha trazado la recta S que es paralela al lado $\overline{bc}$, por lo tanto, aplicando el Teorema de Thales en la figura determinada por las dos rectas paralelas, la recta S y la recta que contiene al segmento $\overline{bc}$, y las rectas transversales que contienen a los segmentos $\overline{ab}$ y $\overline{ac}$, resulta:

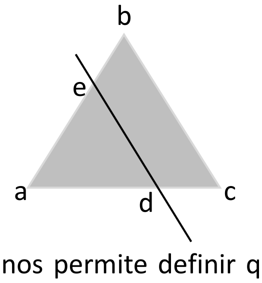
$$\frac{am}{ac} = \frac{an}{ab}; \text{ o bien } \frac{ac}{mc} = \frac{ab}{nb}$$

Se pueden plantear algunas otras proporciones más.

Apliquemos lo obtenido a una situación concreta:

En un triángulo de lados $\overline{ab} = 10\ cm$, $\overline{ac} = 12\ cm$ y $\overline{bc} = 8\ cm$ se traza una recta paralela al lado $\overline{bc}$ a una distancia de $4cm$ del vértice a, medidos sobre el lado $\overline{ab}$, y que corta a los lados $\overline{ab}$ y $\overline{ac}$ en dos puntos e y d respectivamente. Esquematiza la figura según los datos y calcula las medidas de los segmentos $\overline{ad}$, y $\overline{ae}$.

Solución



El enunciado nos permite definir que la medida del segmento $\overline{ae}$ es uno de los datos del problema $(ae = 4cm)$

Para calcular la longitud del segmento $\overline{ae}$ escribimos la proporción conveniente. Por ejemplo:

$$\frac{ab}{ae} = \frac{ac}{ad}$$

Reemplazando por los datos:

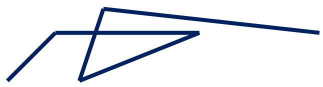
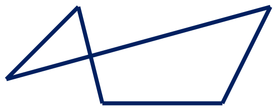
$$\frac{10}{4} = \frac{12}{x}$$

de donde resulta la longitud del segmento $\overline{ad}$ igual a $4{,}8\ cm$.

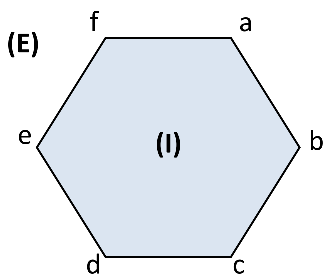
Respuesta: las medidas de los segmentos pedidos son $\boldsymbol{ae = 4cm}$ ***y*** $\boldsymbol{ad = 4{,}8cm}$

POLÍGONOS

Antes de expresar el concepto de polígono, recordemos que una línea poligonal es aquella formada por segmentos de recta consecutivos, no alineados. La siguiente tabla muestra las formas diferentes que puede adoptar una poligonal.

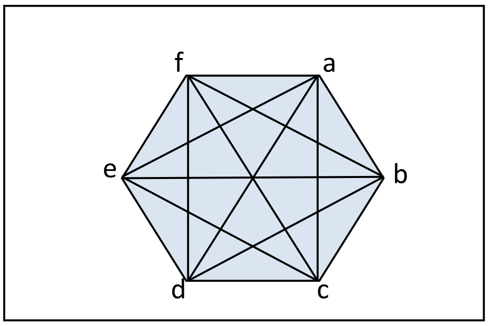
	Abierta: Es aquella en la que los segmentos extremos no coinciden en un mismo punto (punto de inicio y final no coinciden)	**Cerrada:** Es aquella en la que los segmentos extremos coinciden. (punto de inicio y final coinciden)
Simple: Al recorrerla no se pasa dos o más veces por el mismo punto.		
Cruzada: Al recorrerla se pasa dos o más veces por el mismo punto.		

A partir de los conceptos revisados, podemos decir que una poligonal simple cerrada, separa al plano en dos regiones: una llamada región interior **(I)** y otra denominada región exterior **(E)**

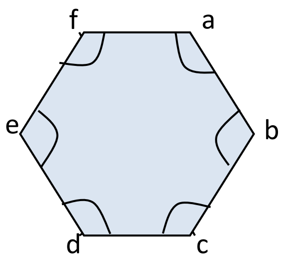


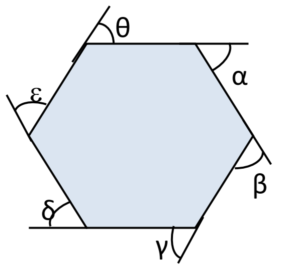
Ya podemos introducir la noción de polígono, como la unión de los puntos de la poligonal simple cerrada y su región interior.

ELEMENTOS DE UN POLÍGONO



- **Lados**: son los segmentos rectilíneos que lo limitan: $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{de}, \overline{ef}, \overline{fa}$.
- **Vértices:** son las intersecciones de dos lados consecutivos: a, b, c, d, e, f.
- **Diagonales:** son los segmentos rectilíneos que unen dos vértices no consecutivos: algunas de ellas son $\overline{ac}, \overline{ad}, \overline{bd}, \overline{be}, \overline{ce}$.
- **Ángulos interiores:** son los ángulos convexos formados por pares de lados consecutivos.
- **Ángulos exteriores:** son los ángulos adyacentes a los ángulos interiores del polígono.





$\widehat{abc}$, $\widehat{bcd}$, $\widehat{cde}$, $\widehat{dea}$, $\widehat{efa}$, $\widehat{fab}$ son ángulos interiores del polígono abcdef.

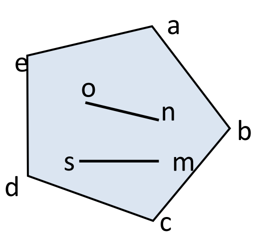
$\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\gamma}$, $\widehat{\varepsilon}$, $\widehat{\theta}$ son ángulos exteriores del polígono abcdef.

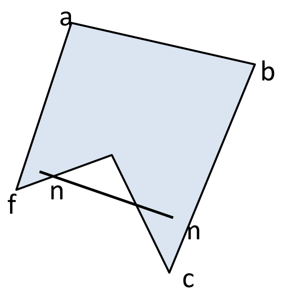
CLASIFICACIÓN DE POLÍGONOS

Según la forma de su contorno, podemos clasificar a los polígonos en

POLÍGONOS SIMPLES CONVEXOS Y SIMPLES CÓNCAVOS:

Los conceptos de concavidad y convexidad para las figuras geométricas son los siguientes:

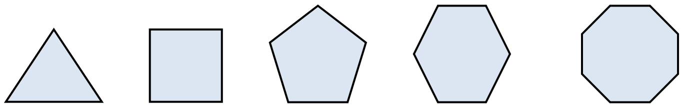




Polígono Simple Convexo
Todo segmento determinado por un par de puntos del polígono está incluido en él.

Polígono Simple Cóncavo
Existe algún segmento determinado por un par de puntos del polígono que no está incluido en él

Además, un polígono es **equilátero**, si tiene todos sus lados congruentes (es decir de igual longitud); es **equiángulo** si tiene todos sus ángulos congruentes (igual amplitud), y es **regular** si tiene todos sus lados y todos sus ángulos congruentes



ALGUNOS POLÍGONOS REGULARES

Los polígonos reciben nombres particulares según el número de ángulos:

Número de lados	Nombre		Número de lados	Nombre
3	triángulo		9	eneágono
4	cuadrángulo		10	decágono
5	pentágono		11	undecágono
6	hexágono		12	dodecágono
7	heptágono		15	pentadecágono
8	octógono		20	icoságono

Propiedades de los polígonos convexos

Teniendo en cuenta el número de lados de un polígono, es posible calcular:

- el número de diagonales que se pueden trazar por cada vértice,
- el número total de diagonales del polígono,
- la suma de sus ángulos interiores,
- el valor de un ángulo interior en el caso que el polígono sea regular.

Generalizando, para un polígono de n lados podemos considerar las siguientes fórmulas:

NÚMERO DE LADOS	NÚMERO DE DIAGONALES POR UN VÉRTICE	NÚMERO TOTAL DE DIAGONALES	SUMA DE ÁNGULOS INTERIORES	SUMA DE ÁNGULOS EXTERIORES
Polígono de n lados	n–3	n(n–3)/2	2R(n–2)	4R

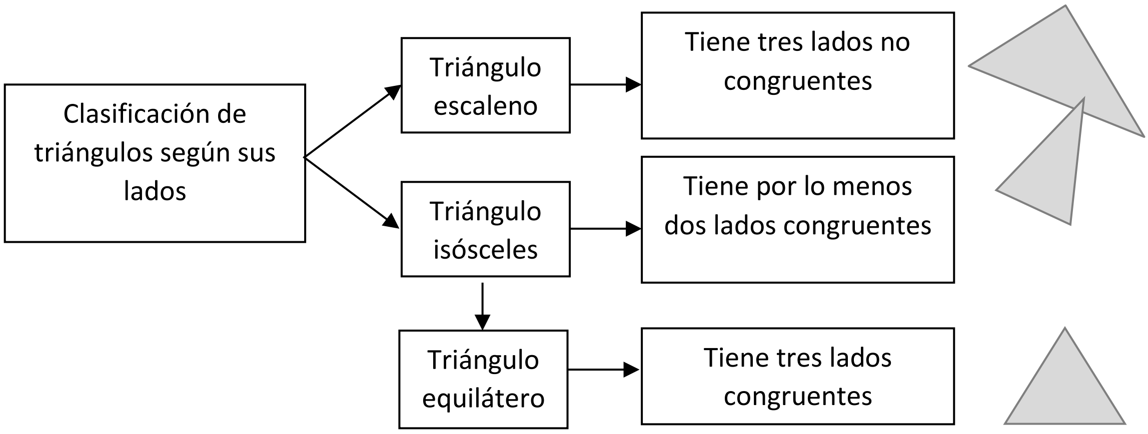
De acuerdo con el cuadro anterior, podríamos construir el siguiente, para algunos de los polígonos que conocemos:

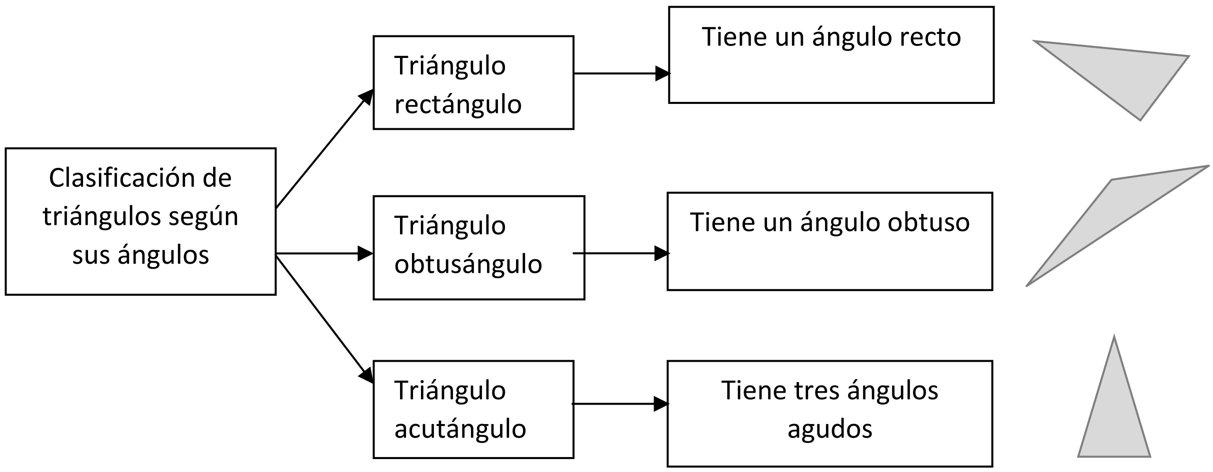
Número de lados	**Número de diagonales por un vértice**	**Número total de diagonales**	**Suma de ángulos interiores**	**Suma de ángulos exteriores**
3	0	0	2R(3–2)=180º	4R=360º
4	1	2	2R(4–2)=360º	4R=360º
5	2	5	2R(5–2)=540º	4R=360º

TRIÁNGULOS

Sigamos ahora trabajando con un polígono de ***tres lados***, que como vimos recibe el nombre de ***triángulo.***

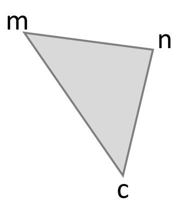
Clasificación de Triángulos





Propiedad de los ángulos interiores de un triángulo

La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180° (2R)



$$m + n + c = 180°$$

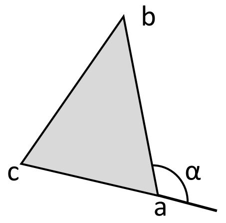
A partir de ese enunciado, es posible expresar otros que se deducen de él y que llamaremos ***corolarios.***

Corolarios:

- En todo triángulo, la amplitud de cada ángulo es igual a 180° menos la suma de las amplitudes de los otros dos ángulos.
- Si en un triángulo un ángulo es obtuso, los dos ángulos restantes son agudos.
- Si en un triángulo un ángulo es recto, los restantes son agudos y complementarios entre sí.
- Si dos triángulos tienen dos ángulos congruentes, los terceros también son congruentes.

Propiedad del ángulo exterior

La amplitud de todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las amplitudes de los dos ángulos interiores no adyacentes a él.



$$\alpha = b + c$$

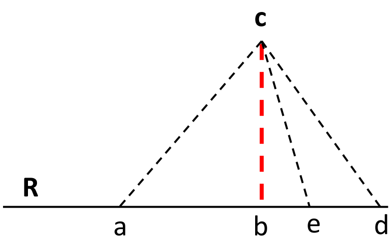
Siendo $\hat{b}$ y $\hat{c}$, ángulos interiores al triángulo abc y $\hat{\alpha}$ el ángulo exterior adyacente al ángulo interior $\hat{a}$.

Corolario: En todo triángulo, la amplitud de cada ángulo exterior es mayor que la amplitud de cualquiera de los ángulos interiores

ALGUNOS LUGARES GEOMÉTRICOS DEL TRIÁNGULO

Al trabajar con triángulos, pueden determinarse rectas, semirrectas y segmentos característicos de los mismos, con los cuales es posible determinar puntos con importantes propiedades matemáticas.

Para comenzar, recordemos el concepto de distancia entre dos puntos. Supongamos que queremos ir desde un punto **c** hasta un río que representamos con una recta **R**, como lo muestra la figura. Sin duda tenemos muchas y distintas posibilidades para llegar desde el punto **c** a la recta **R**, pero ¿cuál es la **distancia** que separa el punto de la recta? Es decir ¿cuál es el camino a elegir si quiero hacer el camino más corto?



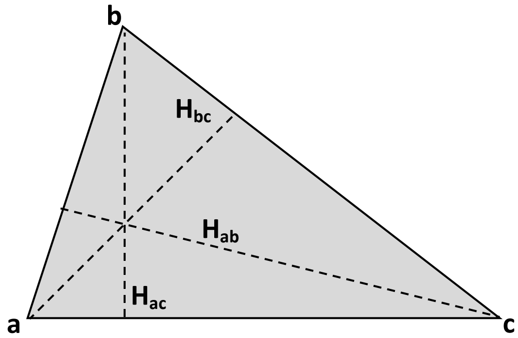
Observando el gráfico podemos ver que el segmento $\overline{bc}$ resulta perpendicular a la recta **R**.

Al punto **b** lo llamamos **pié de la perpendicular**, y a la medida de la longitud del segmento $\overline{bc}$ la llamamos **distancia euclídea del punto c** a la recta **R**.

Encontremos ahora la distancia que separa un lado del triángulo con el vértice opuesto, es decir, encontremos la distancia entre un punto (uno de los vértices) y un lado del triángulo. El segmento que representa geométricamente a esta distancia recibe el nombre de **altura**, entonces decimos:

ALTURA DE UN TRIÁNGULO

Se denomina **altura de un triángulo**, correspondiente a uno de sus lados, al segmento que tiene un extremo en un vértice y el otro en el lado opuesto, siendo perpendicular a ese lado



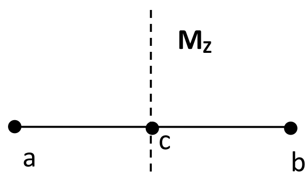
Al trazar las **alturas** correspondientes a los tres lados de un triángulo, es posible ver que estos se intersecan en un punto. A dicho punto se lo denomina **ortocentro.**

MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

Otro concepto que debemos tener claro es el de mediatriz de un segmento, y que a continuación definimos y representamos.

Dado un segmento $\overline{ab}$, si queremos trazar la mediatriz correspondiente, debemos recordar que:

Mediatriz de un segmento (M_Z) es una recta perpendicular al segmento trazada por su punto medio

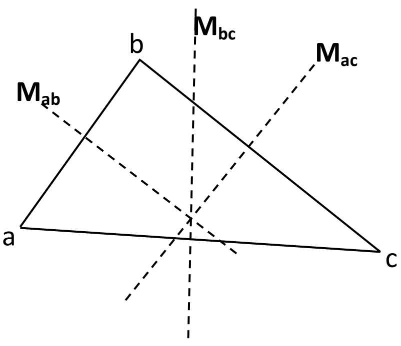


Pero si en lugar de tener que trazar la mediatriz de un segmento, se desea trazar las mediatrices de un triángulo ¿cómo debo proceder?

Con sólo recordar que los lados del triángulo son segmentos, bastará con que encontremos el punto medio de cada uno de esos lados y tracemos la perpendicular a ellos que contenga al punto medio determinado anteriormente. Por lo tanto:

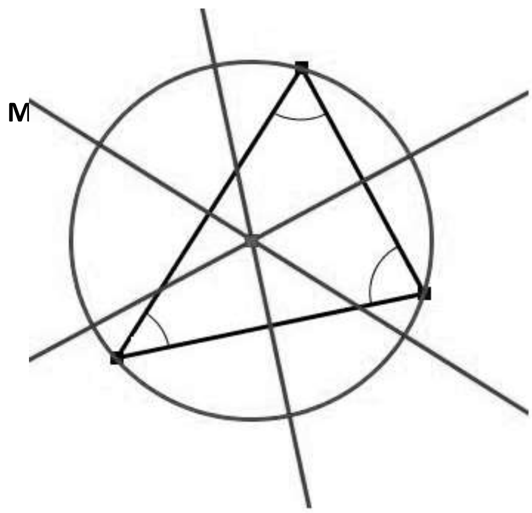
Se denomina **mediatriz correspondiente a un lado de un triángulo,** a la recta perpendicular a dicho lado que pasa por su punto medio.

Veamos un gráfico que ilustre lo que dijimos, y llamemos $\mathbf{M_{ab}}$, $\mathbf{M_{bc}}$, $\mathbf{M_{ac}}$, a las mediatrices correspondientes a los lados $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ac}$ respectivamente.



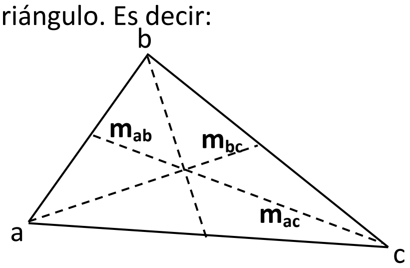
Al trazar las rectas mediatrices correspondientes a los tres lados de un triángulo, es posible ver que estas se intersecan en un punto. A dicho punto se lo denomina **circuncentro**.

El **circuncentro** es el único punto que equidista de los tres vértices del triángulo. Por lo tanto, con centro en el circuncentro es posible trazar una circunferencia, que contiene a los tres vértices del triángulo.



MEDIANAS DE UN TRIÁNGULO

Si trazamos ahora, en este mismo triángulo, un segmento que una el punto medio de cada lado encontrado anteriormente, con el vértice opuesto, determinamos un segmento que no está contenido en ningún caso en las rectas anteriormente trazadas. Estos segmentos reciben el nombre de **medianas** del triángulo. Es decir:

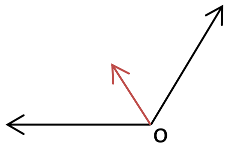


Al trazar los segmentos medianos correspondientes a los tres lados de un triángulo, es posible ver que estos se intersecan en un punto. A dicho punto se lo denomina **baricentro**.

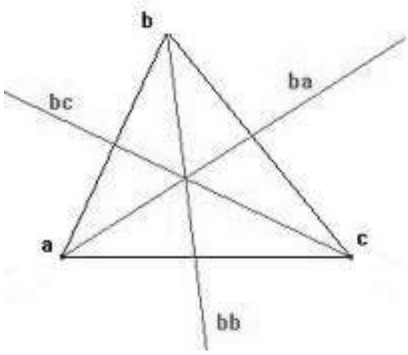
El **baricentro** divide a cada **mediana** en **dos segmentos**, el segmento que une el **baricentro** con el vértice **mide el doble** que el segmento que une **baricentro** con el punto medio del lado opuesto.

BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

Se denomina **bisectriz de un ángulo,** a la semirrecta incluida en el ángulo, cuyo origen coincide con el vértice de dicho ángulo, y es tal que divide a éste en dos ángulos congruentes.

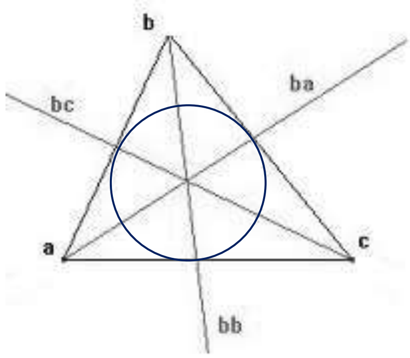


Bisectrices de un triángulo: se denomina así a las tres semirrectas que son bisectrices de los tres ángulos interiores del triángulo.



Al trazar las bisectrices correspondientes a los tres ángulos de un triángulo, es posible ver que estas se intersecan en un punto. A dicho punto se lo denomina **incentro**.

El **incentro** es el único punto que equidista de los tres lados del triángulo. Por lo tanto, con centro en el incentro es posible trazar una circunferencia, que contiene a los tres lados del triángulo.

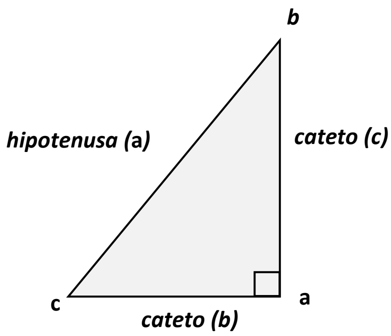


TEOREMA DE PITÁGORAS

Este teorema ha merecido la atención de muchos matemáticos, especialmente de la antigüedad y actualmente están registradas unas 370 demostraciones del mismo. Finalmente, la demostración del teorema se atribuye a Pitágoras, filósofo y matemático griego.

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Antes de escribir simbólicamente esa propiedad recordemos que en un triángulo rectángulo reciben el nombre de **catetos** los lados del triángulo que forman el ángulo recto y la **hipotenusa** es el lado opuesto al ángulo recto.



Si llamamos **b** y **c** a la medida de los catetos, como indica la figura, y **a** a la medida de la hipotenusa, podemos escribir simbólicamente esta propiedad como:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

A partir de ese enunciado, es posible expresar otros que se deducen de él y que llamaremos ***corolarios.***

Corolarios:

- En todo triángulo rectángulo la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos
- En todo triángulo rectángulo cada cateto al cuadrado es igual a la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del otro cateto
- En todo triángulo rectángulo cada cateto es igual a la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del otro cateto.

CUADRILÁTEROS

Sigamos ahora trabajando con un polígono de ***cuatro lados***, que como vimos recibe el nombre de ***cuadrilátero.***

CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS

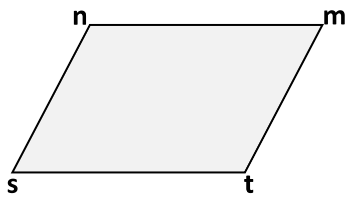
De acuerdo a la condición de paralelismo de los lados opuestos de un cuadrilátero, estos se clasifican en: paralelogramos, trapecios y trapezoides.

PARALELOGRAMOS

Son los cuadriláteros que tienen **dos pares de lados opuestos paralelos**.

Se los puede clasificar conforme a sus lados y ángulos como describimos a continuación.

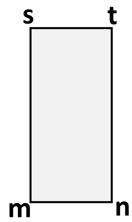
- Aquellos paralelogramos que tienen dos pares de lados opuestos paralelos se denominan simplemente **paralelogramos.**



$\overline{\mathrm{mn}}//\overline{\mathrm{st}}$

$\overline{\mathrm{ns}}//\overline{\mathrm{mt}}$

- Aquellos paralelogramos que tienen sus cuatro ángulos rectos se denominan **rectángulos.**

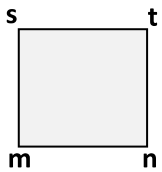


$\overline{\mathrm{mn}}//\overline{\mathrm{st}}$

$\overline{\mathrm{ms}}//\overline{\mathrm{nt}}$

$m = \mathrm{n} = \mathrm{s} = \mathrm{t} = 90°$

- Aquellos paralelogramos que tienen sus cuatro ángulos rectos y además la medida de la longitud de sus cuatro lados son congruentes se denominan **cuadrados.**

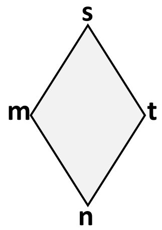


$\overline{\mathrm{mn}}//\overline{\mathrm{st}}$

$\overline{\mathrm{ms}}//\overline{\mathrm{nt}}$

$m\mathrm{n} = \mathrm{ms} = \mathrm{st} = \mathrm{tn}$

- Aquellos paralelogramos que tienen las medidas de las longitudes de sus cuatro lados congruentes y además la amplitud de los ángulos opuestos congruentes se denominan **rombos.**



$\overline{\mathrm{mn}}//\overline{\mathrm{st}}$

$\overline{\mathrm{ms}}//\overline{\mathrm{nt}}$

$m\mathrm{n} = \mathrm{ms} = \mathrm{st} = \mathrm{tn}$

$m = \mathrm{t}\ \mathrm{y} = \mathrm{s} = \mathrm{n}$

A continuación, figuran algunas propiedades que cumple cada uno de los paralelogramos:

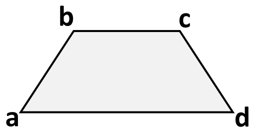
PROPIEDADES	**PARALELOGRAMO**	**RECTÁNGULO**	**ROMBO**	**CUADRADO**
Dos pares de lados opuestos congruentes	X	X	X	X
Dos pares de ángulos opuestos congruentes	X	X	X	X
Sus diagonales son congruentes		X		X
Sus diagonales son perpendiculares			X	X
Sus diagonales se cortan mutuamente en partes congruentes	X	X	X	X
Cada diagonal es bisectriz de un par de ángulos opuestos			X	X
Tiene dos pares de lados consecutivos congruentes			X	X

TRAPECIOS

Son los el cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos.

Se los puede clasificar en isósceles, rectángulos o escalenos. A continuación, describimos cada uno de ellos.

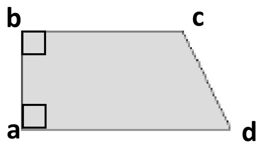
- Aquellos trapecios que tienen los lados no paralelos de igual longitud reciben el nombre de **trapecios isósceles.**



$$\overline{bc}//\overline{ad}$$

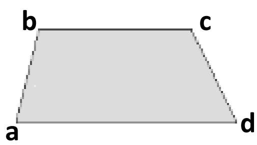
$$ab = cd$$

- Aquellos trapecios que tienen dos ángulos rectos reciben el nombre de **trapecios rectángulos.**



$$a = b = 90°$$

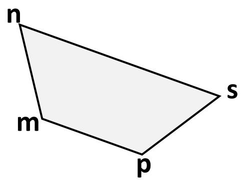
- Aquellos trapecios que no tienen lados congruentes ni ángulos rectos reciben el nombre de **trapecios escalenos.**



Segmentos representativos de los trapecios

- **Bases del trapecio:** Se les llama así a los lados paralelos.

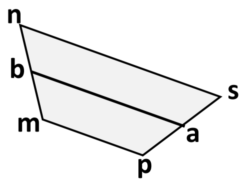
$\overline{\mathrm{mp}}\ y\ \overline{\mathrm{ns}}$ son bases del trapecio



- **Base media**: Se le llama así al segmento que une a los puntos medios de los lados no paralelos. La medida de la longitud de la base media es igual a la semisuma de la longitud de las bases

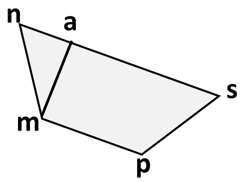
$\overline{\mathrm{ab}}$ es base media del trapecio, y su medida se calcula por:

$$\mathrm{ab} = \frac{\mathrm{ns}+\mathrm{mp}}{2}$$



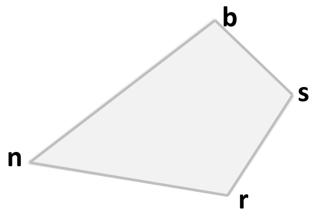
- **Altura del trapecio**: Es el segmento que va desde uno de los vértices del trapecio al lado opuesto o su prolongación, en forma perpendicular.

$\overline{\mathrm{ma}}$ es una de las alturas del trapecio.



TRAPEZOIDES

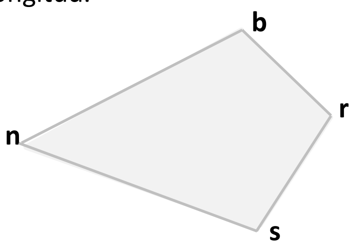
Son los cuadriláteros que **no tienen lados paralelos**.



Un caso particular de los trapezoides lo constituyen los romboides, los cuales tienen dos pares de lados consecutivos de igual longitud.

$nb = ns$

$br = rs$

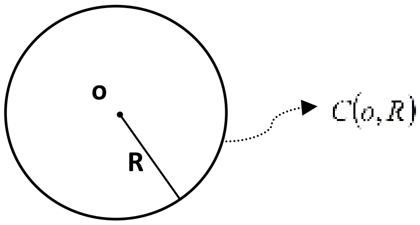


CIRCUNFERENCIAS Y CÍRCULOS

CIRCUNFERENCIA

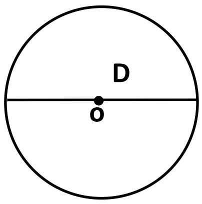
Dado en un plano un punto *o* y un número real positivo *r*, se llama circunferencia de centro *o* y radio *R* al conjunto de todos los puntos de ese plano que se encuentran a una distancia de *o*, igual a *r* (que además es la medida del radio R)

Designamos a la circunferencia de centro "o" y radio "R", como $C(o, R)$

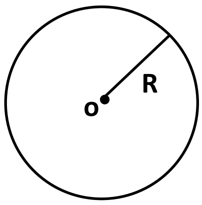


El punto dado **o** recibe el nombre de *centro* de la circunferencia y el segmento **R,** de longitud *r,* se llama *radio* de la misma.

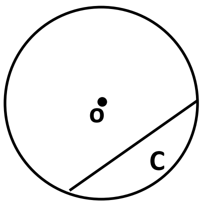
Radio, Diámetro y Cuerda



Radio (R): todo segmento que une el centro de la circunferencia con un punto de la misma. La longitud de dicho segmento es ***r***.



Diámetro (D): todo segmento que une dos puntos de la circunferencia y contiene al centro de la misma, su longitud es *2r.*



Cuerda (C): todo segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia, su longitud varía entre *r* y *2r*.

Un caso particular de cuerda son los diámetros.

Algunas conclusiones

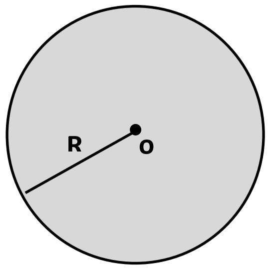
En una circunferencia,

- Todos los radios son congruentes.
- Todos los diámetros son congruentes.
- La longitud de un diámetro es igual a dos veces la longitud de un radio.
- Los diámetros son las cuerdas de mayor longitud.

CÍRCULO

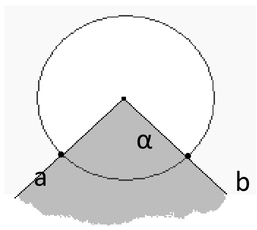
Dado en un plano un punto *o* y un número real positivo *r*, se llama círculo de *centro o y radio R* al conjunto de todos los puntos de ese plano que se encuentran a una distancia de o igual o menor a la medida del *radio R* (r)

Lo designamos como $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{R})$.



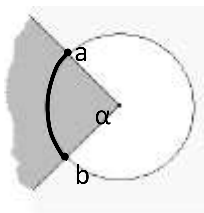
Ángulo central

Un ángulo central es todo ángulo cuyo vértice es el centro de un círculo o circunferencia



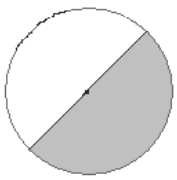
Arco de circunferencia

Un arco de circunferencia es la intersección de una circunferencia con uno de sus ángulos centrales.



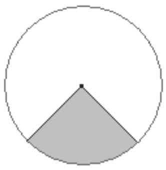
Semicírculo

Es la región limitada por un diámetro y su arco (cualquiera de los dos que éste determina)



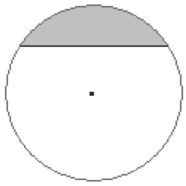
Sector Circular

Es la región del círculo comprendida entre un arco y los dos radios que determinan sus extremos.



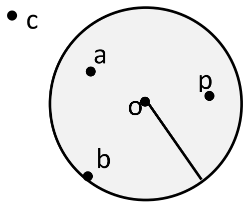
Segmento Circular

Es la región del círculo comprendido entre un arco y su cuerda.



Algunas conclusiones

Dado un círculo y un conjunto de puntos podemos decidir si los puntos dados son exteriores, interiores o pertenecen al círculo dado.



La distancia entre el punto **a** y el centro **o** es menor que la longitud del radio, por lo tanto, **a** es un punto interior al círculo. Lo mismo ocurre con **p**.

La distancia entre el punto **c** y el centro **o** es mayor que la longitud del radio, por lo tanto, **c** es punto exterior al círculo.

La distancia entre el punto **b** y el centro **o** es congruente con la longitud del radio, por lo tanto, **b** es punto perteneciente a la frontera del círculo.

En resumen:

- Un punto es interior a un círculo si su distancia al centro es menor que la longitud del radio.
- Un punto es exterior a un círculo si su distancia al centro es mayor que la longitud del radio.
- Un punto pertenece a la frontera de un círculo si su distancia al centro es congruente con la longitud del radio.

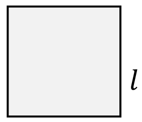
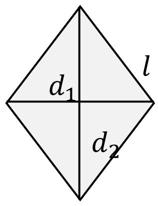
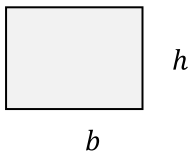
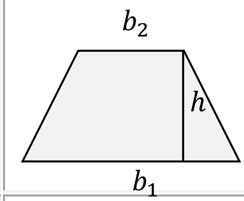
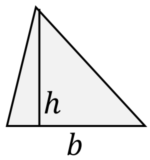
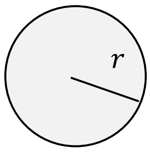
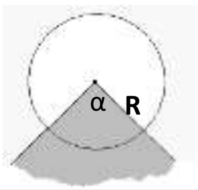
PERÍMETROS Y ÁREAS

Recordemos los conceptos de área y perímetro de una figura plana:

- El **área** de una figura es la medida de la superficie que ocupa.
- El p**erímetro** de una figura es la medida de la longitud de su borde

Obtener el perímetro de una figura cerrada no es tan difícil; basta sumar lo que mide cada uno de los lados que forman su contorno.

En la siguiente tabla encontrarás las fórmulas para calcular el perímetro y el área de algunas figuras geométricas básicas:

Figura		Perímetro	Área
Cuadrado de lado l		$P = 4l$	$A = l^2$
Rombo de lado l y diagonales d_1 y d_2.		$P = 4l$	$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$
Rectángulo de base b y altura h.		$P = 2b + 2h$	$A = b \cdot h$
Trapecio de base mayor b_1, base menor b_2 y altura h.		Suma de las longitudes de los cuatro lados.	$A = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}$
Triángulo de base b y altura h		Suma de las longitudes de los tres lados.	$A = \frac{b \cdot h}{2}$
Círculo de radio r		$P = 2\pi r$ (el perímetro de un círculo es la longitud de la circunferencia)	$A = \pi r^2$
Longitud de arco y área de sector circular de ángulo central α y radio R.		Longitud de arco $L = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}$	Área del sector circular $A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$

FIGURAS TRIDIMENSIONALES: CUERPOS

Hasta aquí nuestro estudio se ha referido a figuras que tienen dos dimensiones: largo y ancho, base y altura, etc. Ahora recordaremos los cuerpos geométricos y diremos que un cuerpo es una figura de tres dimensiones: largo, alto y ancho. Además, como también es una figura, decimos que es un conjunto infinito de puntos.

Clasificación de los cuerpos

Cuerpos redondos: limitados por lo menos por una cara curva

- **Cilindro**

- **Esfera**

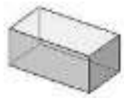
- **Cono**

Cuerpos poliedros:

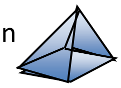
limitados por caras planas, que son polígonos

- **Prisma**
  - **Cubo**

  - **Prismas**



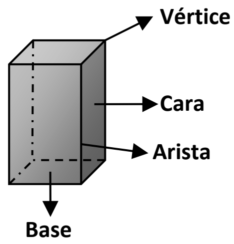
- **Pirámides:** su base puede ser un polígono regular o no



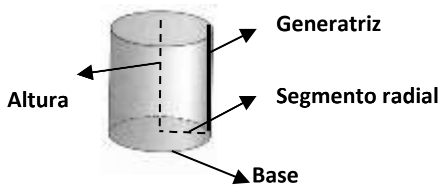
Elementos de los cuerpos

En los siguientes cuerpos podemos distinguir sus elementos:

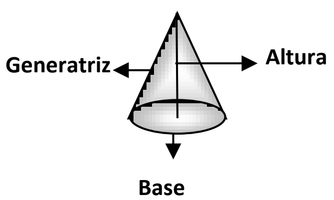
Prisma



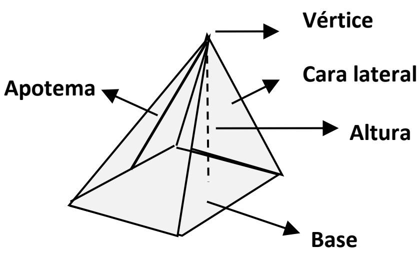
Cilindro



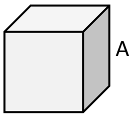
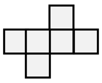
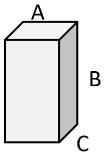
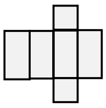
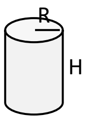
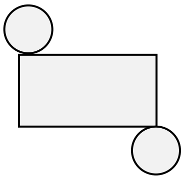
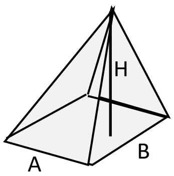
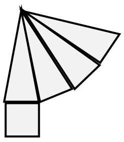
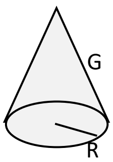
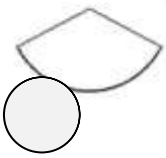
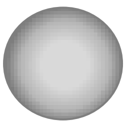
Cono



Pirámide



SUPERFICIES Y VOLÚMENES

NOMBRE	DIBUJO	DESARROLLO	ÁREA FÓRMULA GENERAL: PERÍMETRO DE LA BASE POR ALTURA DE LAS CARAS (SI EL CUERPO TIENE VÉRTICE O ES TRUNCO, SE DIVIDE POR DOS)	VOLUMEN FÓRMULA GENERAL: ÁREA DE LA BASE POR ALTURA DEL CUERPO (SI EL CUERPO TIENE VÉRTICE O ES TRUNCADO, SE DIVIDE POR 3)
Cubo			$Area = 6 \cdot A^2$	$Volumen = A^3$
Prisma (base rectangular)			$Area = 2AC + 2AB + 2BC$	$Volumen = ABC$
Cilindro			$Area = 2\pi R^2 + 2\pi RH$	$Volumen = \pi R^2 H$
Pirámide			$Area = \frac{Per_{base} \cdot Ap}{2} + AB$	$Volumen = \frac{ABH}{3}$
Cono			$Area = \pi.R.(R+G)$	$Volumen = \frac{\pi R^2 H}{3}$
Esfera			**$Area = 4\pi.R^2$**	$Volumen = \frac{4\pi R^3}{3}$

TRIGONOMETRÍA

UN POCO DE HISTORIA

Los historiadores concuerdan en que fueron los griegos anteriores a Sócrates los iniciadores de la trigonometría. A Tales de Mileto, uno de los siete sabios de Grecia, se le atribuye el descubrimiento de cinco teoremas geométricos y su participación en la determinación de las alturas de las pirámides de Egipto utilizando la relación entre los ángulos y lados de un triángulo. Hiparco, notable geómetra y astrónomo griego, sistematizó estos conceptos en una tabla de cuerdas trigonométricas que hoy son la base de la trigonometría moderna. Por su trabajo se le considera el padre o fundador de la trigonometría.

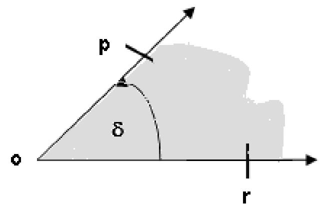
La trigonometría en principio es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos. Interviene directa o indirectamente en las demás ramas de la matemática y se aplica en todos aquellos ámbitos donde se requieren medidas de precisión. La trigonometría se aplica a otras ramas de la geometría, como es el caso del estudio de las esferas en la geometría del espacio.

Posee numerosas aplicaciones: las técnicas de triangulación, por ejemplo, son usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas de navegación por satélites.

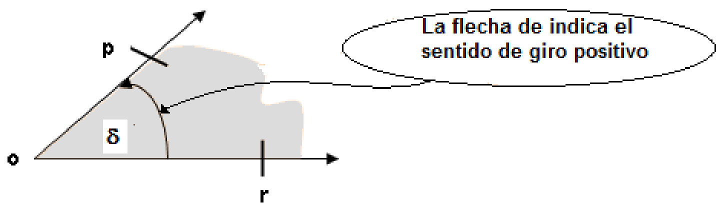
SISTEMAS DE MEDICIÓN DE AMPLITUD DE ÁNGULOS

ÁNGULOS ORIENTADOS

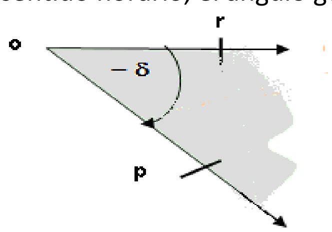
Un ángulo orientado es la figura generada por la rotación de una semirrecta alrededor de su extremo. La posición inicial se llama *lado inicial* (corresponde a la semirecta $\overrightarrow{or}$) y la posición final se llama *lado terminal* (corresponde a la semirecta $\overrightarrow{op}$). El punto fijo se llama vértice *o*.



Si la rotación se realiza en sentido antihorario (contrario a las agujas del reloj) el ángulo generado se considera por convención *positivo*.

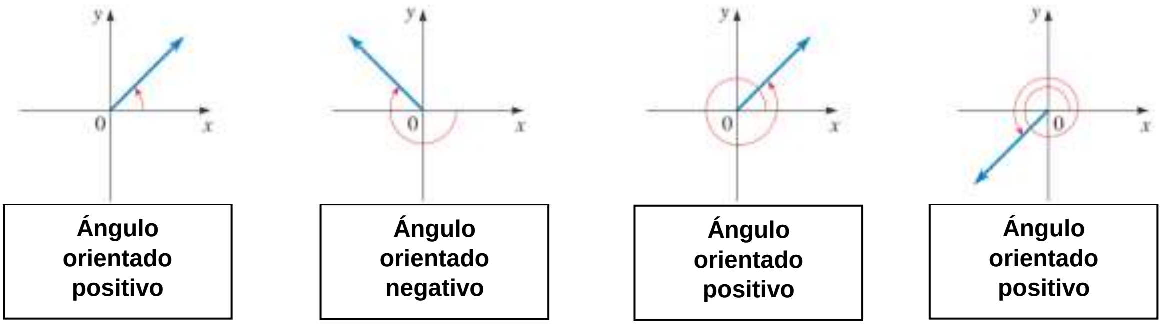


Si la rotación se realiza en sentido horario, el ángulo generado es *negativo*.



ÁNGULOS CENTRADOS EN UN SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

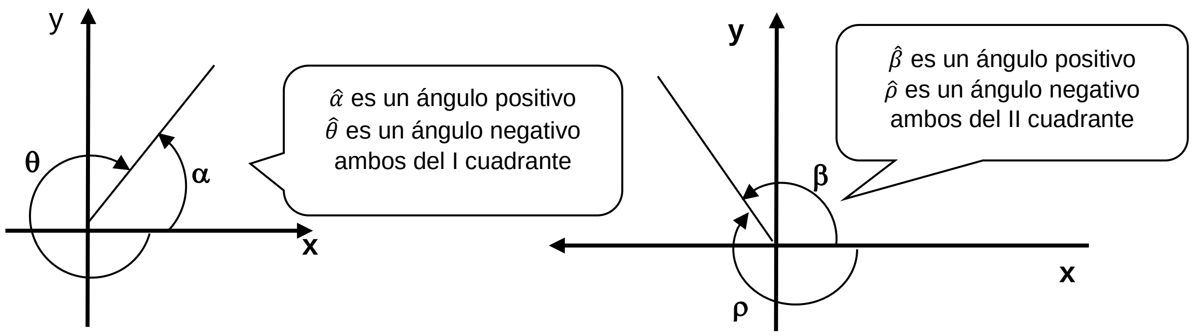
Dado en el plano de un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales de centro en **o,** llamamos ángulo *centrado* a todo ángulo orientado con vértice en el origen de coordenadas, cuyo lado inicial coincide con el semieje positivo de las abscisas, y que al rotarlo genera ángulos orientados positivos y negativos como se observa en las siguientes figuras.

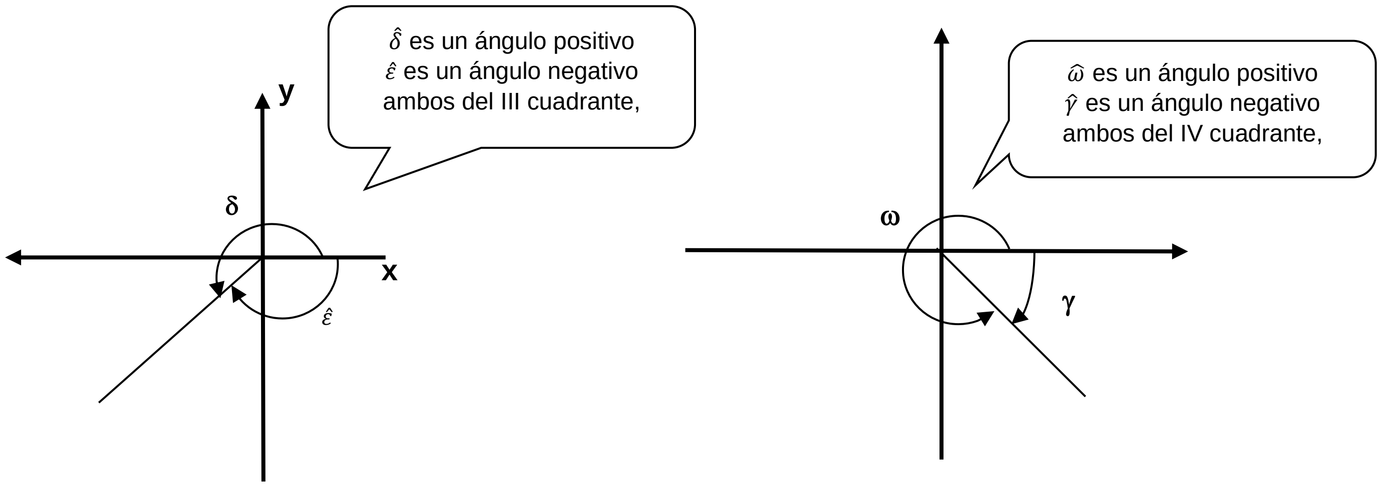


Nota: no existe un límite para la amplitud de un ángulo. Se puede generar ángulos orientados de un giro o más de un giro.

Por ejemplo: Si se realiza una rotación completa de un giro en sentido contrario a las agujas del reloj, se ha generado un ángulo positivo de 360°, si se realizan dos giros en sentido horario, se ha generado entonces un ángulo negativo de –720°.

Por último, sabemos que los ejes coordenados dividen al plano en cuatro cuadrantes y en relación al cuadrante en el que se encuentre el lado terminal, se asocia el ángulo con el mismo. Veamos los siguientes ejemplos.





Sistemas de medición angular

1. Sistema sexagesimal

La unidad de medida de la amplitud angular, se llama grado, y resulta de dividir un ángulo recto en 90 partes iguales, por lo tanto, un ángulo recto mide 90°. Te recordamos las siguientes equivalencias:

$$1^{o} = \frac{\acute{a}ngulo\ \ recto}{90}$$

$$\textit{1 minuto} \rightarrow 1' = \frac{1^{o}}{60}$$

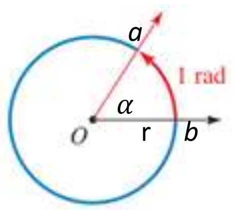
$$\textit{1 segundo} \rightarrow 1'' = \frac{1'}{60}$$

1° = 60´ = 3600´´

2. Sistema radial o circular

En el sistema radial para medir ángulos se utiliza como unidad de medida al *radian*.

Para determinar la amplitud del ángulo $\hat{\alpha}$, en el sistema radial, se debe centrar dicho ángulo en un círculo de radio 1. La unidad de medida que utilizaremos será equivalente al radio de la circunferencia.

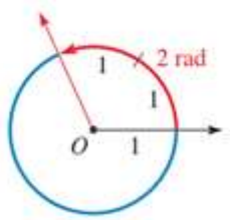


Un radián es la medida del ángulo central que subtiende en cualquier circunferencia un arco de longitud igual al radio.

La medida del $\widehat{ab}$ respecto al radio es el número de veces que dicho radio está contenido en el arco. Para obtener la amplitud de $\hat{\alpha}$, se divide la longitud del arco $\widehat{ab}$ por la longitud del radio ***r***. Es decir:

$$\alpha = \frac{longitud\, arco\, ab}{r}$$

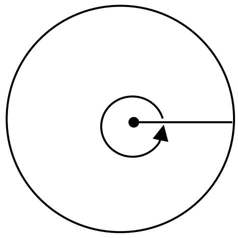
El ángulo cuyo arco que contiene una vez al radio se dice que mide un radian. Un arco medirá dos radianes si su longitud es dos veces la longitud de su radio.



A cada arco de una circunferencia le corresponde uno y sólo un ángulo central que lo subtiende por lo que podemos atribuir al ángulo la medida del ardo en radianes.

RELACIÓN ENTRE LOS DOS SISTEMAS

Sabemos que una circunferencia contiene 2π veces a su radio, por lo tanto:



$$\begin{cases} 360° \text{ ---- } 2\pi \\ 180° \text{ ---- } \pi \\ 90° \text{ ---- } \pi/2 \end{cases}$$

1 giro = 2π radianes *1 radián= 57° 17’ 45’’*

De acuerdo con esto, establecemos la siguiente equivalencia:

360° = 2π radianes, o bien, **π radianes = 180°**

Ejemplos:

- ✓ Sea $\theta = 36°, luego\ \theta = 36°.\frac{\pi}{180°} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{5} rad$
- ✓ Sea $\omega = \frac{\pi}{4}, luego\ \omega = \frac{\pi}{4}.\frac{180°}{\pi} \rightarrow \omega = 45°$

Nota: Con frecuencia emplearemos una frase como *un ángulo de 30°* para indicar *un ángulo cuya medida es 30°*. Asimismo, para un ángulo θ, se escribe θ=30° o $\theta = \frac{\pi}{6}$ para indicar que la medida de θ es 30° o $\frac{\pi}{6} rad$.

Además, cuando no se da ninguna unidad, se supone que el ángulo se mide en radianes.

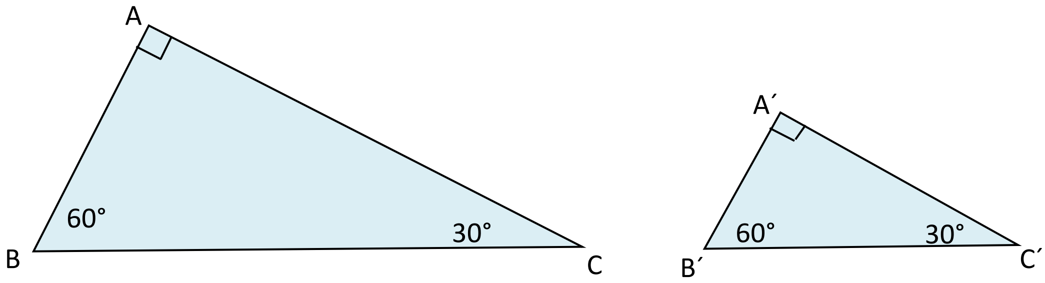
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Recordemos que en todo *triángulo rectángulo*:

- La *hipotenusa* es el lado que se opone al *ángulo recto*.
- Los *catetos* son los lados que se oponen a los *ángulos agudos*.
- Los ángulos agudos son *complementarios*.

Las funciones trigonométricas surgen de una forma natural al estudiar el triángulo ***rectángulo*** y observar que las razones (cocientes) entre las longitudes de dos cualesquiera de sus lados sólo dependen del valor de los ángulos del triángulo. Pero vayamos por partes.

Primero consideraremos triángulos rectángulos ABC, rectángulos en A, con $\hat{B} = 60°$ y $\hat{B} = 30°$. Todos los triángulos que dibujemos con estos ángulos son semejantes, y, por ello, las medidas de sus lados proporcionales:



Esto quiere decir que si calculamos en el primer triángulo $\frac{AC}{BC}$ obtendremos el mismo resultado que si calculamos en el segundo triángulo el cociente $\frac{A´C´}{B´C´}$. Se supone que esto ya lo sabes, pero si eres desconfiado y el razonamiento no te convence del todo, tienes algunas posibilidades: Una consiste en dibujar con mucho cuidado triángulos distintos con ángulos interiores de 90°, 60° y 30° y calcular los resultados de las divisiones anteriores (el cateto opuesto al ángulo de 60º dividido por la longitud de la hipotenusa) para así comprobar que siempre se obtiene el mismo resultado (aproximadamente 0,87).

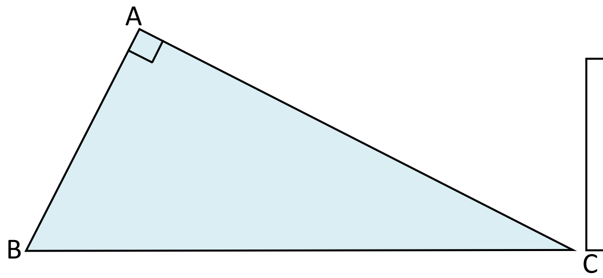
Otra posibilidad es hacer exactamente lo mismo pero dibujando triángulos, midiendo y dividiendo las longitudes con ayuda de algún programa informático (Geogebra, etc.).

Si realizamos las mismas divisiones en triángulos rectángulos con ángulos distintos a los anteriores (por ejemplo: 90°, 40°, 50°) veremos que sucede lo mismo: al dividir la longitud del cateto opuesto al ángulo de 40° entre la longitud de la hipotenusa se obtiene siempre el mismo resultado (aproximadamente 0,64) A ese valor constante que se obtiene al dividir la longitud del cateto opuesto al ángulo de 40° entre la longitud de la hipotenusa se le llama ***seno*** de 40°, y se escribe sen(40°) = 0,64.

A partir de aquí definiremos las razones trigonométricas de ángulos agudos de triángulos rectángulos.

Nota: Cuando escribamos $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ o $\overline{BA}$, por ejemplo, estaremos refiriéndonos a los catetos o hipotenusa de un triángulo. En cambio, cuando escribamos simplemente *BC, AC o BA*, por ejemplo, estaremos refiriéndonos a *la medida* de los catetos o hipotenusa de un triángulo.

DEFINICIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS



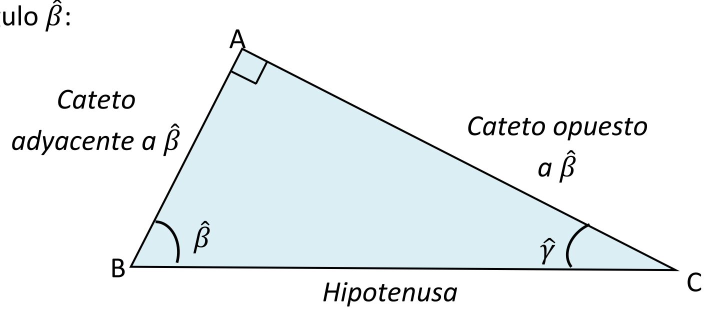
$\hat{A}$: Ángulo recto

$\overline{BC}$**:** hipotenusa

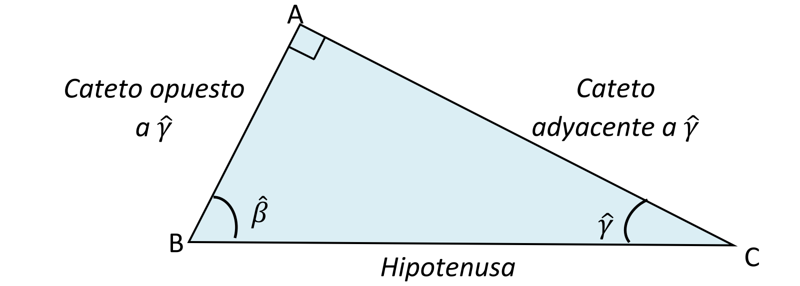
$\overline{AC}$ y $\overline{AB}$: catetos

Los catetos de un triángulo rectángulo, reciben nombres particulares, según su posición respecto de los ángulos agudos del triángulo, es decir:

Según el ángulo $\hat{\beta}$:



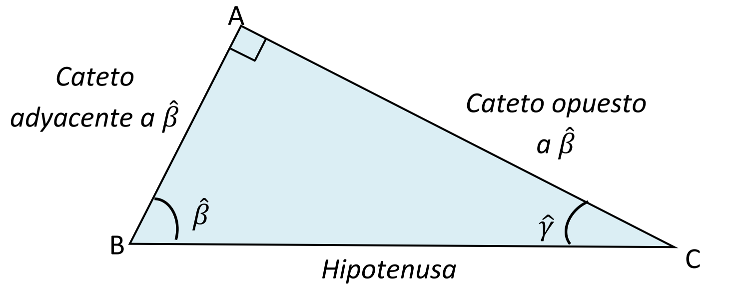
Según el ángulo $\hat{\gamma}$:



Teniendo presente esto, veremos cómo se definen seis razones trigonométricas, en un triángulo rectángulo, las cuales son: *seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente*.

En un triángulo rectángulo se define como *seno de un ángulo agudo* al valor obtenido al dividir la *longitud del cateto opuesto al ángulo entre la longitud de la hipotenusa.*

Asi:



$$sen\ \hat{B} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{AC}{BC}$$

Se define como *coseno de un ángulo agudo* al valor obtenido al dividir la *longitud del cateto adyacente al ángulo entre la longitud de la hipotenusa*

$$cos\ \hat{B} = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{BA}{BC}$$

Se define como *tangente de un ángulo agudo* de un triángulo rectángulo al valor del cociente obtenido al dividir ***la longitud del cateto opuesto entre la longitud del cateto contiguo*****.**

$$tag\ \hat{B} = \frac{cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente} = \frac{AC}{BA}$$

A partir de estas definiciones se pueden definir las razones trigonométricas recíprocas.

Se definen la *cosecante*, la *secante* y la *cotangente*, como las razones recíprocas al *seno, coseno* y *tangente*, del siguiente modo:

En un triángulo rectángulo, se define la *secante* de cualquier ángulo agudo como la expresión recíproca del *coseno***,** es decir, el cociente entre la medida de la hipotenusa y la medida del cateto adyacente.

En un triángulo rectángulo se define la *cosecante* de cualquier ángulo agudo como la expresión recíproca del *seno,* es decir, el cociente entre la medida de la hipotenusa y la medida del cateto opuesto.

En un triángulo rectángulo se define la *cotangente* de cualquier ángulo agudo como la expresión recíproca de la *tangente,* es decir, el cociente entre la medida del cateto opuesto y la medida del cateto adyacente.

En símbolos:

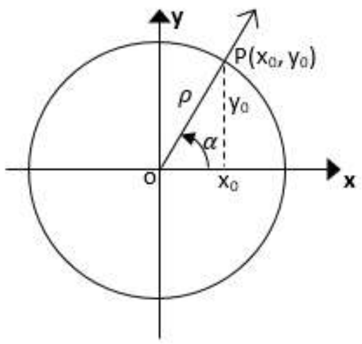
$$sec\ \hat{B} = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{BC}{BA}$$

$$cosec\ \hat{B} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{BC}{AC}$$

$$cotag\ \hat{B} = \frac{cateto\ adyacente}{Cateto\ opuesto} = \frac{AB}{CA}$$

Veamos ahora estas mismas razones, pero vinculándolas a una circunferencia trigonométrica en un sistema de coordenadas cartesianas.

Si tenemos una circunferencia trigonométrica centrada en un sistema de coordenadas cartesianas, y fijamos un ángulo $\widehat{\alpha}$, su lado final es el radio de la circunferencia que lo llamamos ρ el cual determina sobre la circunferencia un punto *P* de coordenadas (x_0,y_0),



Observamos que se forma un triángulo rectángulo $o\widehat{x_0}p$, en el cual:

$\overline{\rho}$: es la hipotenusa, llamada también, radio vector
$\widehat{\alpha}$ es el ángulo agudo
$\overline{Ox}_0$ cateto adyacente al ángulo $\widehat{\alpha}$: abscisa del punto *P*
$\overline{Px}_0$: cateto opuesto al ángulo $\widehat{\alpha}$: ordenada del punto P

Teniendo en cuenta las definiciones de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, podemos definir las mismas de la siguiente manera:

$$sen\ \alpha = \frac{ordenada}{radio\ vector} = \frac{y_0}{\rho} \qquad cos\ \alpha = \frac{abscisa}{radio\ vector} = \frac{x_0}{\rho} \qquad tag\ \alpha = \frac{ordenada}{abscisa} = \frac{y_0}{x_0}$$

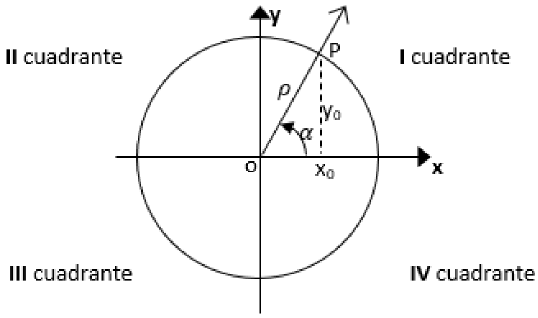
Sus recíprocas serán:

$$cosec\ \alpha = \frac{radio\ vector}{ordenada} = \frac{\rho}{y_0} \qquad sec\ \alpha = \frac{radio\ vector}{abscisa} = \frac{\rho}{x_0} \qquad cotag\ \alpha = \frac{abscisa}{ordenada} = \frac{x_0}{y_0}$$

Signo de las funciones trigonométricas

De acuerdo con el cuadrante en que se halle el lado terminal del ángulo y teniendo en cuenta que la distancia de un punto cualquiera al origen de coordenadas es siempre positiva, las funciones trigonométricas pueden ser positivas o negativas.

De acuerdo con las definiciones y teniendo en cuenta que la distancia al origen de P es 1, se tiene lo descripto en el siguiente diagrama:



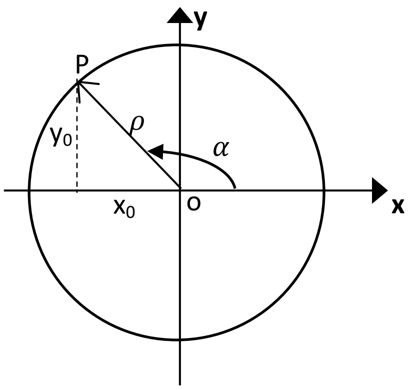
En el *I cuadrante* todas las funciones trigonométricas son positivas, ya que x_0 e y_0 son positivos ($x_0>0$ e $y_0>0$)

$sen\ \alpha = \frac{y_0}{\rho} \longrightarrow \frac{+}{+} \rightarrow (+)$ $\qquad cos\ \alpha = \frac{x_0}{\rho} \rightarrow \frac{+}{+} \rightarrow (+)$ $\qquad tg\ \alpha = \frac{y_0}{x_0} \rightarrow \frac{+}{+} \rightarrow (+)$

Sus recíprocas serán por lo tanto positivas dejamos a ustedes la demostración de ello.

Conclusión: Si el ángulo pertenece al primer cuadrante, el seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente asociadas son positivas

En el *II cuadrante*, x_0 es negativo e y_0 es positivo, es decir $x_0 < 0$ e $y_0 > 0$, por lo que:



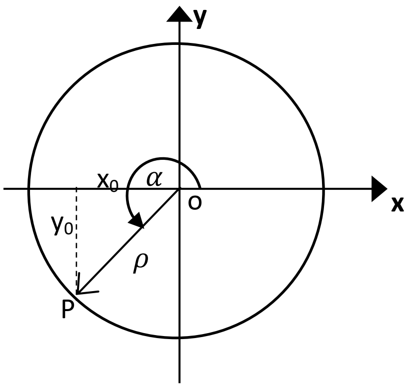
$sen\ \alpha = \frac{y_0}{\rho} \rightarrow \frac{+}{+} \rightarrow (+)$ $\qquad cos\ \alpha = \frac{x_0}{\rho} \rightarrow \frac{-}{+} \rightarrow (-)$ $\qquad tg\ \alpha = \frac{y_0}{x_0} \rightarrow \frac{+}{-} \rightarrow (-)$

¿Qué signo tendrán las funciones recíprocas?

$cosec\ \alpha = \frac{\rho}{y_0} \rightarrow \frac{+}{+} \rightarrow (+)$ $\qquad sec\ \alpha = \frac{\rho}{x_0} \rightarrow \frac{+}{-} \rightarrow (-)$ $\qquad cotg\ \alpha = \frac{x_0}{y_0} \rightarrow \frac{-}{+} \rightarrow (-)$

Conclusión: Si el ángulo pertenece al segundo cuadrante, solo son positivas el seno y cosecante

En el *III cuadrante*, x_0 e y_0 son negativas, es decir $x_0 < 0$ e $y_0 < 0$, por lo que:

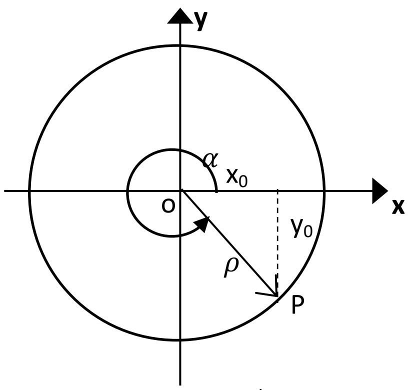


$$sen\ \alpha = \frac{y_0}{\rho} \to \frac{-}{+} \to (-) \qquad cos\ \alpha = \frac{x_0}{\rho} \to \frac{-}{+} \to (-) \qquad tg\ \alpha = \frac{y_0}{x_0} \to \frac{-}{-} \to (+)$$

$$cosec\ \alpha = \frac{\rho}{y_0} \to \frac{+}{-} \to (-) \qquad sec\ \alpha = \frac{\rho}{x_0} \to \frac{+}{-} \to (-) \qquad cotg\ \alpha = \frac{x_0}{y_0} \to \frac{-}{-} \to (+)$$

Conclusión: Si el ángulo pertenece al tercer cuadrante, solo son positivas la tangente y cotangente

En el *IV cuadrante*, x_0 es positivo e y_0 es negativo, es decir $x_0 > 0$ e $y_0 < 0$, por lo que:

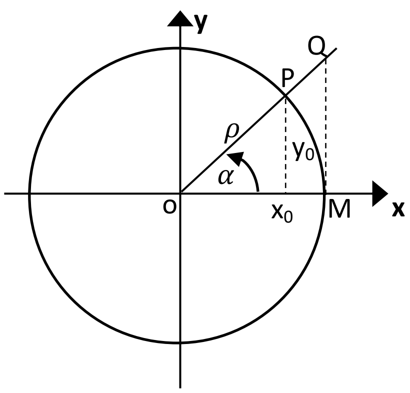


$$sen\ \alpha = \frac{y_0}{\rho} \to \frac{-}{+} \to (-) \qquad cos\ \alpha = \frac{x_0}{\rho} \to \frac{+}{+} \to (+) \qquad tg\ \alpha = \frac{y_0}{x_0} \to \frac{-}{+} \to (-)$$

$$cosec\ \alpha = \frac{\rho}{y_0} \to \frac{+}{-} \to (-) \qquad sec\ \alpha = \frac{\rho}{x_0} \to \frac{+}{+} \to (+) \qquad cotg\ \alpha = \frac{x_0}{y_0} \to \frac{+}{-} \to (-)$$

Conclusión: Si el ángulo pertenece al cuarto cuadrante, solo son positivos el coseno y secante

Ahora bien, como ya se dijo con anterioridad, una circunferencia trigonométrica tiene un radio cuya medida es igual a la unidad, es decir es igual a 1. De acuerdo con las definiciones dadas anteriormente y teniendo en cuenta que la distancia al origen de P es 1, podemos determinar:



Sabiendo que $\rho = 1$

$$sen\ \alpha = \frac{y_0}{\rho} = \frac{y_0}{1} = y_0$$

$$cos\ \alpha = \frac{x_0}{\rho} = \frac{x_0}{1} = x_0$$

$$tag\ \alpha = \frac{y_0}{x_0} = \frac{QM}{OM} = QM$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL SENO, COSENO Y TANGENTE

Al estar definidas las razones seno, coseno y tangente para cualquier ángulo (¿las tangentes existen para cualquier ángulo?), dan lugar al concepto de funciones trigonométricas: función seno, función coseno y función tangente. He aquí sus representaciones gráficas.

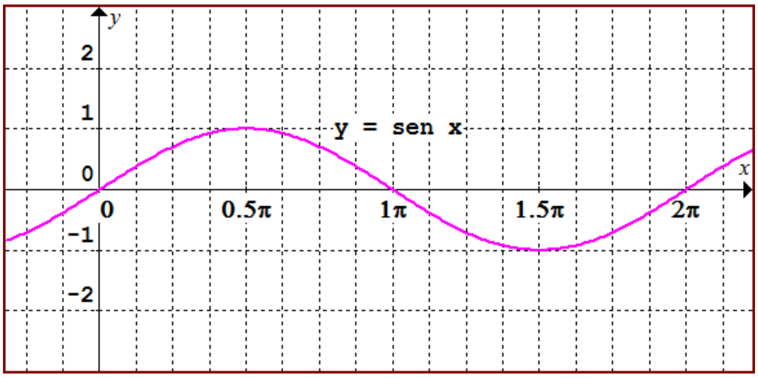
Características de la función $y = sen\ (x)$

- ✓ Dom: $\mathbb{R}$
- ✓ Img:$[-1,1]$
- ✓ Abscisas de los puntos de intersección con eje *x*: x = $k\pi$, k$\in\mathbb{Z}$
- ✓ Algunos intervalos de: - Crecimiento: $\left(-\frac{5\pi}{2},-\frac{3\pi}{2}\right),\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right)$, etc.

  - Decrecimiento: $\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{1\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, etc.

  - Positividad: $(-2\pi,-\pi),(0,\pi)$, etc.

  - Negatividad: $(-\pi,0),(\pi,2\pi)$, etc.



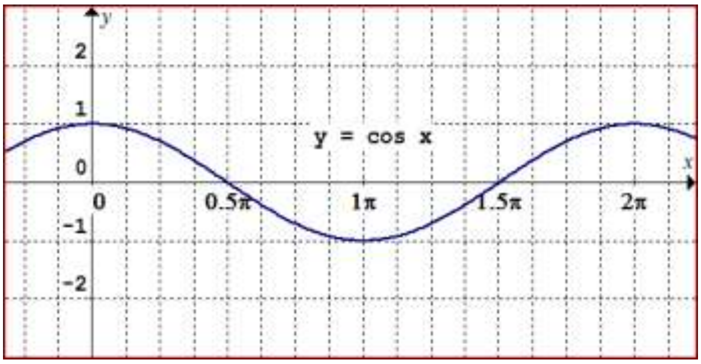
Características de la función $y = cos\ (x)$

- ✓ Dom:$\mathbb{R}$
- ✓ Img:$[-1,1]$
- ✓ Abscisas de los puntos de intersección con eje *x*: x = $\frac{\pi}{2}$ + kπ, k∈ Z.
- ✓ Algunos intervalos de: - Crecimiento (-π, 0), (π, 2π), etc.

  - Decrecimiento (-2π, -π) (0, π) , etc.

  - Positividad: $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right)$, etc.

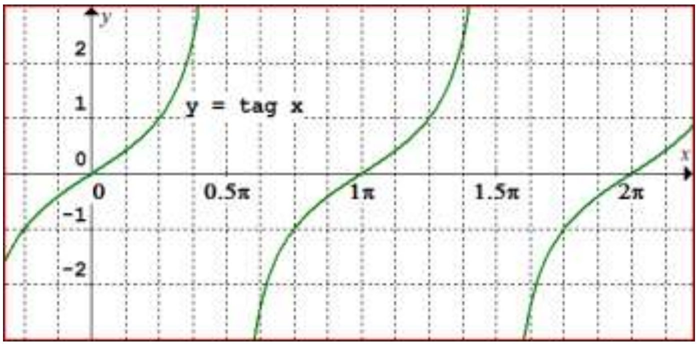
  - Negatividad: $\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{1\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, etc.



Características de la función $y = tg\ (x)$

- ✓ Dom: $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- ✓ Img: $\mathbb{R}$
- ✓ Abscisas de los puntos de intersección com el eje x: x = kπ, k∈ $\mathbb{Z}$
- ✓ Es estrictamente creciente en todo su domínio.
- ✓ Algunos intervalos de: - Positividad: $\left(0;\frac{\pi}{2}\right),\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$, etc.

  - Negatividad: $\left(-\frac{\pi}{2};0\right),\left(\frac{1}{2}\pi;\pi\right)$, etc.



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

En trigonometría, cuando el ángulo se expresa en radianes (dado que un radián es el arco de circunferencia de longitud igual al radio), suele denominarse arco a cualquier cantidad expresada en radianes; por eso las funciones inversas se denominan con el prefijo arco, así si:

$$y = sen\ (x)$$

La función inversa se calcula así:

$$x = arcsen\ (y)$$

Es decir, *x* es el *arco* cuyo seno vale *y*, o también *x* es el *arco seno* de *y*.

En el caso de $y = cos\ (x)$, la función inversa se calcula así:

$$x = arc\ cos\ (y)$$

Es decir, *x* es el *arco* cuyo coseno vale *y*, o también *x* es el *arco coseno* de *y*.

En el caso de que la función sea $y = tag\ (x)$, la función inversa se calcula así:

$$x = arctag\ (y)$$

Es decir, *x* es el *arco* cuya tangente vale *y*, o también *x* es el *arco tangente* de *y*.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Una identidad es una igualdad algebraica, esto es, una igualdad en la que aparecen números e incógnitas que siempre se cumple, sean cuales sean los valores de esas incógnitas. La identidad trigonométrica más importante para recordar es:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Esta igualdad se conoce con el nombre de *identidad trigonométrica fundamental* y de ella se puede despejar para obtener:

$$cos\ \alpha = \sqrt{1 - sen^2\alpha}\text{ , o bien }sen\,\alpha = \sqrt{1 - cos^2\,\alpha}$$

Otras identidades útiles son:

$$\rightarrow\quad tg\ \alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\ \alpha}$$

$$\rightarrow\quad cot\,g\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{sen\,\alpha}$$

$$\rightarrow\quad cosec\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha}$$

$$\rightarrow\quad sec\alpha = \frac{1}{cos\ \alpha}$$

Es importante recordar que la identidades son igualdades que no se resuelven, es decir, no se averigua qué valores toma la incógnita, puesto que, como ya dijimos, toda identidad es una igualdad válida para todos los valores del campo de definición de la o las incógnitas intervinientes. Así pues, si tenemos la identidad: $sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)}$, la misma es válida para todos los valores de α, con la excepción de aquellos que anulan el denominador del segundo miembro (o sea, excepto aquellos que hacen cero a cos(α))

Para verificar identidades se tienen en cuenta todas las relaciones que se han visto anteriormente, y una estrategia consiste en trabajar con el primer miembro de la igualdad, el cual se transformará de tal manera que lleguemos a obtener lo que expresa el segundo miembro, o viceversa.

Por ejemplo, verifiquemos la siguiente identidad: $tg^2(\alpha) + 1 = sec^2(\alpha)$

En este caso, se trabajará algebraicamente el primer miembro ($tg^2(\alpha) + 1$) para lograr llegar a expresarlo tal como figura en el segundo miembro ($sec^2(\alpha)$)

Para eso, se reemplaza la expresión, por identidades, buscando que quede expresado en términos del *seno* y del *coseno.*

$tg^2(\alpha)+1=\left(\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)^2+1$	dado que $tg(\alpha)=\dfrac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$
$\dfrac{(sen(\alpha))^2}{(\cos(\alpha))^2}+1$	Aplicamos distributiva de la potenciación con respecto a la división
$\dfrac{(sen(\alpha))^2+(\cos(\alpha))^2}{(\cos(\alpha))^2}$	Sumamos ambos términos
$\dfrac{1}{(\cos(\alpha))^2}$	Pues $sen^2(\alpha)+cos^2(\alpha)=1$
$\left(\dfrac{1}{\cos(\alpha)}\right)^2$	
$sec^2(\alpha)$	recordando que $sec(\alpha)=\dfrac{1}{cos(\alpha)}$
$tg^2(\alpha)+1=sec^2(\alpha)$	Finalmente, se llegamos a la igualdad

Ecuaciones trigonométricas

Recordemos que, una ecuación es una igualdad algebraica que es cierta para algunos valores de las incógnitas y falsa para otros.

Por tanto, la diferencia entre identidad y ecuación es que la identidad siempre es cierta, mientras que la ecuación no.

El valor o valores de la incógnita que hacen que la igualdad se cumpla se llaman solución de la ecuación.

Vamos a resolver ecuaciones en las que aparecen razones trigonométricas de ángulos orientados. La incógnita será la medida del ángulo y buscaremos soluciones en ángulos menores de un giro.

Ejemplo: Hallar todos los valores de *x* que verifican la siguiente ecuación:

$$2tg^2x+sec^2x=2$$

$2tg^2x+sec^2x=2$	Para ello se sustituyen las funciones trigonométricas que aparecen en la ecuación por sus equivalentes, para lograr que quede expresada en términos de la función seno y coseno, únicamente
$2\dfrac{sen^2x}{cos^2x}+\dfrac{1}{cos^2x}=2$	Reemplazamos $sen^2x=1-cos^2x$ y sumamos los dos términos del primer miembro
$\dfrac{2(1-cos^2x)+1}{cos^2x}=2$	Despejamos y trabajamos algebraicamente
$2-2cos^2x+1=2cos^2x$	Agrupamos los términos afines en cada miembro
$2cos^2x-2cos^2x=-1-2$	Agrupamos los términos afines en cada miembro
$-2cos^2x-2cos^2x=-1-2$	Sumamos términos afines

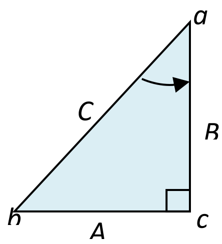
$-4cos^2x = -3$	
$\cos x = \pm\sqrt{\frac{-3}{-4}}$	Despejamos, para obtener el valor de *x*
$x = arco\ cos\left(\pm\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$	Recuerda, si quieres la respuesta en grados sexagesimales debes tener la calculadora programada en ese modo. Si quieres la respuesta en radianes, también debes tener programada la calculadora para ello
$x = 30°, 150°, 210°, 330°$	

En este caso las soluciones se expresan en grados sexagesimales. Se suele trabajar también con los valores de las soluciones expresados en radianes.

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo rectángulo es encontrar las medidas de sus tres lados y tres ángulos a partir de algunos de ellos que son conocidos. Para calcularlos hay que emplear algunas de las relaciones vistas anteriormente.

Dado el triángulo de la figura y sus datos



$$Datos\begin{cases} ángulo\ \hat{a} \\ Cateto\ B \end{cases}$$

Debemos calcular: cateto A, hipotenusa C y ángulo $\hat{b}$

Calculo del cateto A

Nos preguntamos ¿qué relaciona los datos, es decir el ángulo $\hat{a}$, el cateto B y la incógnita, el cateto A?

$$tg\ a = \frac{A}{B}, \text{ luego:}$$

$$B\ .\ tg\ a = A$$

Calculo de la hipotenusa C

En este caso nos preguntamos ¿qué relaciona los datos, es decir el ángulo $\hat{a}$, el cateto B y la incógnita, el hipotenusa C?

$$cos\ a = \frac{B}{C}, \text{ luego:}$$

$$C = \frac{B}{cos\ a}$$

Cálculo del ángulo $\hat{b}$

Para calcular el valor del ángulo $\hat{b}$, nos remitimos a la propiedad de triángulos: *la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a ……….*

$$\hat{a} + \hat{b} = 90°; \text{ luego:}$$

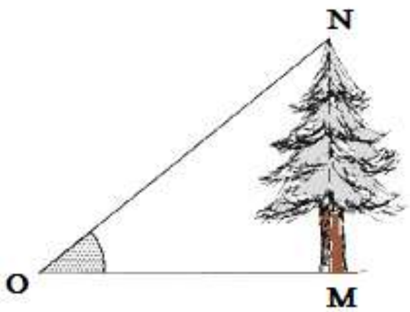
$$\hat{b} = 90° - \hat{a}$$

NOTA: Dos ángulos que se emplean con frecuencia en la resolución de triángulos en general son los *ángulos de elevación y de depresión.*

Ángulo de elevación

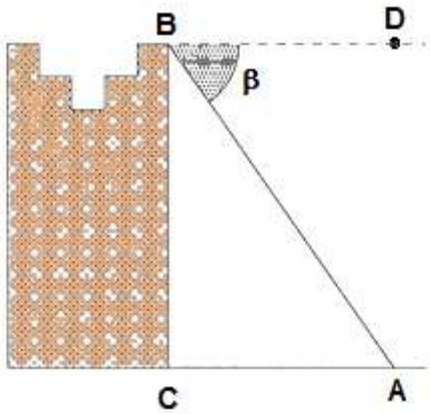
El ángulo **O**, formado por la horizontal $\overline{OM}$ y la visual $\overline{ON}$ situadas en el mismo plano vertical es el ángulo de elevación del punto **N**, que es, a su vez, el punto más elevado

Algunos ejemplos:



Ángulo de depresión

El ángulo $\hat{\beta}$, formado por la horizontal $\overline{BD}$ y la visual $\overline{BA}$, situadas en el mismo plano vertical, es el ángulo de depresión del punto **A**.

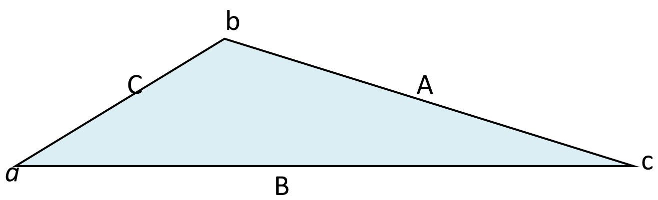


Resolución de triángulos oblicuángulos

Para resolver ahora un triángulo cualquiera debemos encontrar las medidas de sus lados y/o ángulos a partir de algunos de ellos que son conocidos. Para calcularlos hay que emplear las siguientes relaciones, que se establecen como *Leyes.*

Ley del seno

En todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos



$$\frac{A}{sen\ a} = \frac{B}{sen\ b} = \frac{C}{sen\ c}$$

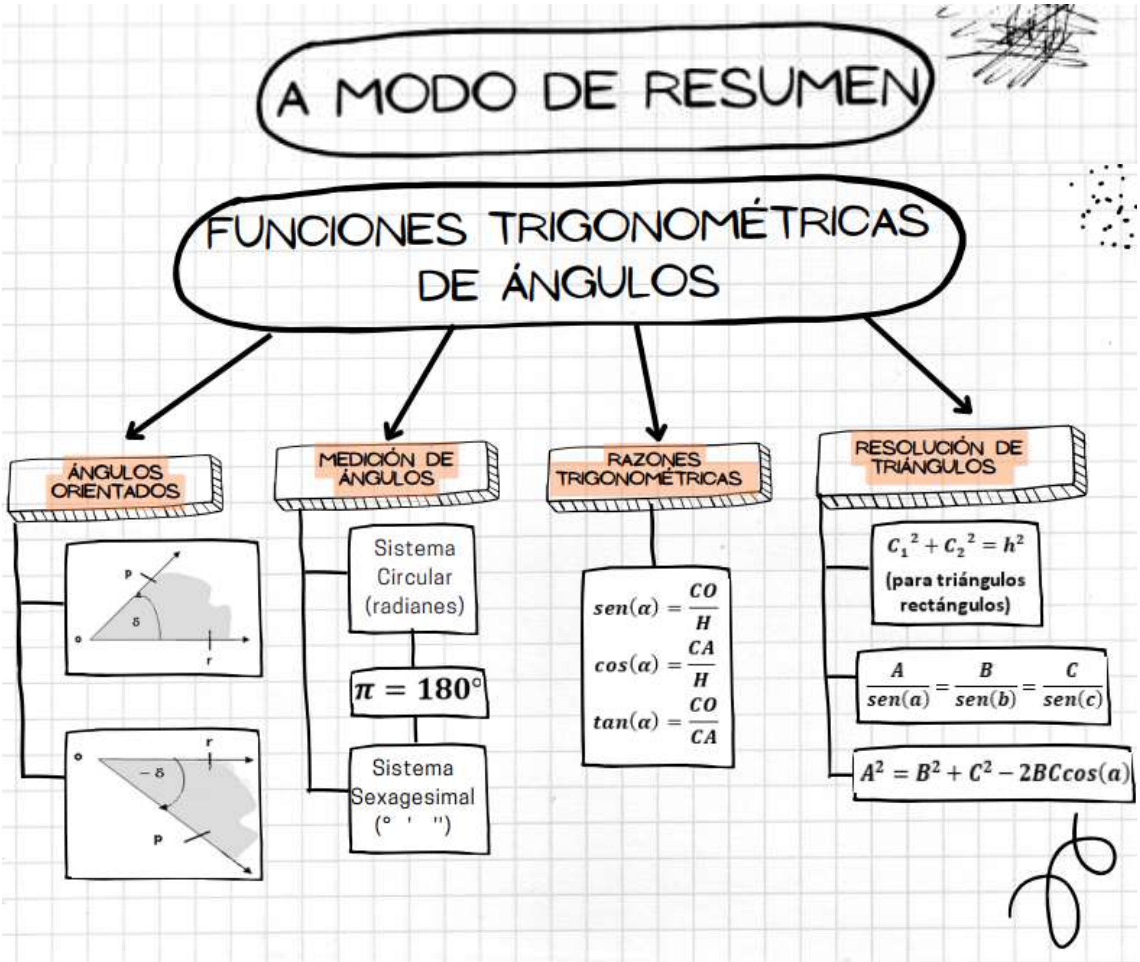
LEY DEL COSENO

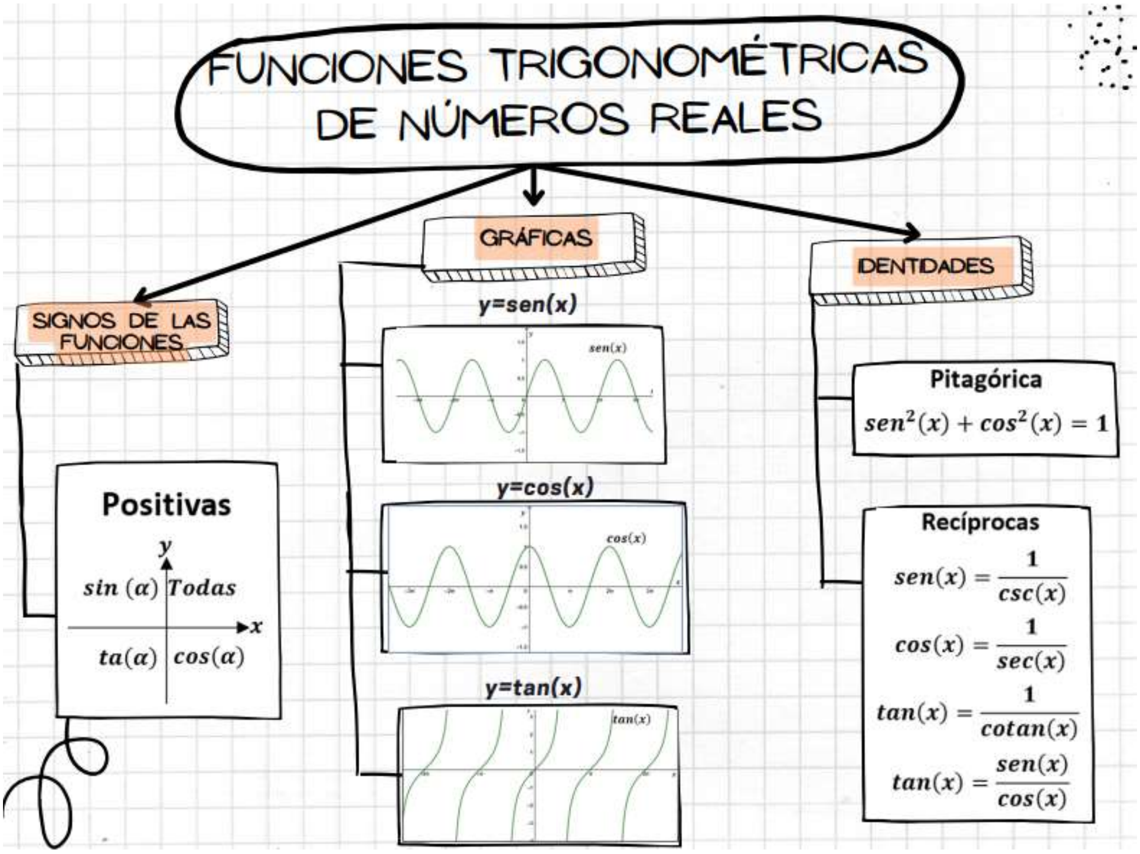
El cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo del producto de dichos lados por el coseno del ángulo comprendido

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2\,B\,C\cos a$$

$$B^2 = A^2 + C^2 - 2\,A\,C\cos b$$

$$C^2 = B^2 + A^2 - 2\,A\,B\,cos\,c$$




FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE NÚMEROS REALES
SIGNOS DE LAS FUNCIONES
GRÁFICAS
IDENTIDADES
Positivas
y
$sin\ (\alpha)$
$Todas$
x
$ta(\alpha)$
$cos(\alpha)$
y=sen(x)
sen(x)
y=cos(x)
cos(x)
y=tan(x)
tan(x)
Pitagórica
$sen^2(x) + cos^2(x) = 1$
Recíprocas
$sen(x) = \frac{1}{csc(x)}$
$cos(x) = \frac{1}{sec(x)}$
$tan(x) = \frac{1}{cotan(x)}$
$tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$

BIBLIOGRAFÍA

Berman, A., Kaczor, P. (2013). Carpeta de Matemática II. Ed. Santillana.

Stewart, J., Redlin, L., Watson, S. (2001). Precálculo. Tercera edición. Ed. Thomson.

Swokowski, E., Cole, J. (1997). Trigonometría. Octova edición. Ed. Thomson.