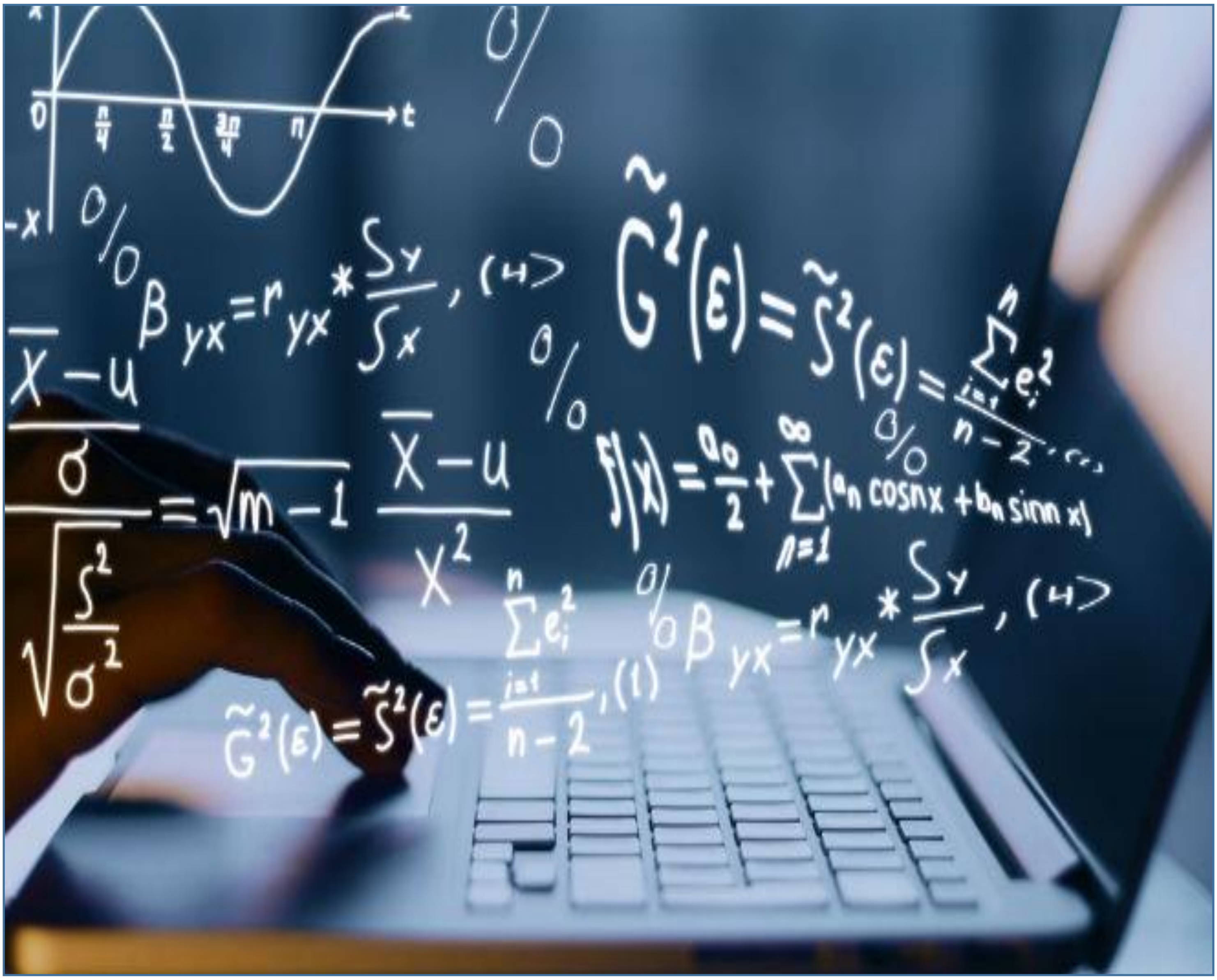
# INGRESO 2025



# MATEMÁTICAS

## Práctica

**Carreras**: Ingeniería Agronómica, Licenciatura en Bromatología, Bromatología, Ingeniería en Recursos Naturales Renovables, Tecnicatura Universitaria en Viticultura y Enología


UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE CIENCIAS AGRARIAS

CAAyN
Comisión Asesora de Admisión y Nivelación

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO | FCA FACULTAD DE CIENCIAS AGRARIAS

# MATEMÁTICA

## PRÁCTICA

## CURSO DE NIVELACIÓN: INGRESO 2025

**AUTORES:** Bageta, Rubén;
Bevaqua, Alicia;
Cecconato, Adrián;
Garriga, Marcela;
Montalto, María Elena;
Pivetta, Amalia;
Tirador, Marta.

# INDICE

# 1. CONJUNTOS NUMÉRICOS

## CONJUNTOS NUMÉRICOS

Antes de empezar a trabajar con la ejercitación propuesta revisa tus conocimientos con respecto a los conjuntos numéricos ($N$, $Z$, $Q$, $R$), la relación entre sus elementos (números) y su interpretación sobre la recta numérica. ¡Ahora a trabajar!

I-01 Coloca sobre la línea de puntos $<$, $>$ o $=$ según corresponda:

a) $\frac{1}{2}$ ............... $0$ f) $\sqrt{\mathbf{2}}$ .............. $1{,}41$

b) $5$ ............... $6$ g) $\frac{1}{2}$ ................. $0{,}5$

c) $-1$........... $-2$ h) $\frac{1}{3}$ ................. $0{,}33$

d) $-3$ ............ $-\frac{5}{2}$ i) $\frac{2}{3}$ ................. $0{,}67$

e) $\pi$.............. $3{,}14$ j) $\frac{1}{4}$ ................. $0{,}25$

I-02 Dados los siguientes números reales: $0$; $-2$; $2$; $-1{,}5$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$.

a) Ubícalos sobe la recta de los números reales.
b) Ordénalos de menor a mayor.

I-03 Resuelve cada expresión.

a) $3^0 =$ e) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 =$ i) $\frac{2^3 .\ 3^2}{2\ .\ 3^{-2}} =$

b) $3^2 =$ f) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3 =$ j) $9^{\frac{3}{2}} =$

c) $4^{-2} =$ g) $3^{-6}\ 3^4 =$ k) $(-27)^{\frac{2}{3}} =$

d) $-3^2 =$ h) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} =$ l) $\left(-\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} =$

I-04 Indica verdadero o falso, encerrando en un círculo la respuesta correcta.

a) $\frac{16+a}{16} = 1 + \frac{a}{16}$ V - F f) $2\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{2a}{2b}$ V - F

b) $\frac{b}{b-c} = 1 - \frac{b}{c}$ V - F g) $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$ V - F

c) $\frac{2}{4+x} = \frac{1}{2} + \frac{2}{x}$ V - F h) $\frac{1+x+x^2}{x} = \frac{1}{x} + 1 + x$ V - F

d) $\frac{x+1}{y+1} = \frac{x}{y}$ V - F i) $\frac{x^2+1}{x^2+x-1} = \frac{1}{x-1}$ V - F

e) $\frac{x}{x+y} = \frac{1}{1+y}$ V - F j) $\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1; para\ todo\ x$ V - F

A modo de ejemplo, analizaremos el valor de verdad del inciso b).

Queremos averiguar si $\frac{b}{b-c} = 1 - \frac{b}{c}$ es V o F.

Para ello utilizaremos un **contraejemplo**: si hacemos $b = 2$ y $c = 1$, vemos que $\frac{b}{b-c} = \frac{2}{2-1} = 2$. Por otro lado, $1 - \frac{b}{c} = 1 - \frac{2}{1} = -1$. Al reemplazar los valores en ambos miembros obtenemos como resultados valores distintos, podemos concluir entonces que la afirmación es **Falsa**.

La técnica de utilizar un contraejemplo se emplea cuando queremos mostrar que una afirmación es falsa. No sirve para determinar que una afirmación es verdadera. Para ver esto, supongamos que queremos establecer si $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ es V o F.

Sabemos que esta afirmación es falsa, dado que es bien sabido que $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, pero … podríamos equivocarnos si queremos mostrar el valor de verdad dando ejemplos:

Si ponemos $a = 0$ y $b = 1$ en la misma, $(a+b)^2 = (0+1)^2 = (1)^2 = 1$ y; además $a^2 + b^2 = 0^2 + 1^2 = 1$. La conclusión errónea sería "como ambos miembros dan resultados iguales, entonces $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ es V".

La clave de todo esto es que la afirmación, para ser verdadera, debería cumplirse **para todos** los valores de $a$ y $b$, lo que fácilmente se ve que no es cierto, basta tomar $a = 1$ y $b = 1$ para convencerse.

I-05 Indica, encerrando con un círculo, si la afirmación es verdadera o falsa

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2}$ | $V$ | $F$ |
| b) | $q + m \cdot p = q + (m \cdot p)$ | $V$ | $F$ |
| c) | $\sqrt[m]{(p:m)^r} = p^{m/r} : q^{m/r}$ | $V$ | $F$ |
| d) | $p^m : p^n = p^{m \cdot n}$ | $V$ | $F$ |
| e) | $(p:m) \cdot n = p:(m \cdot n)$ | $V$ | $F$ |
| f) | $\frac{p}{q} + m = \frac{p+m}{q}$ | $V$ | $F$ |
| g) | $\left(\frac{3}{4}\right)^{0} = \frac{3^0}{4^0} = 1$ | $V$ | $F$ |
| h) | $q \cdot \left(\frac{r}{p}\right) = \frac{q \cdot r}{p}$ | $V$ | $F$ |
| i) | $\frac{p+m}{m} = \frac{p}{m} + 1$ | $V$ | $F$ |
| j) | $\sqrt{(m+n)^3} = m^{3/2} + n^{3/2}$ | $V$ | $F$ |
| k) | $\sqrt{4y^5} = 2y^{\frac{5}{2}}$ | $V$ | $F$ |
| l) | $\frac{2}{m} + \frac{3}{m} = \frac{2+3}{2m}$ | $V$ | $F$ |
| m) | $\left(\frac{a}{f}\right)^{m} . \left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \left(\frac{a}{fb}\right)^{m+n}$ | $V$ | $F$ |
| n) | $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{m}\right)^{n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{mn}$ | $V$ | $F$ |

I-06 Escribe cada desigualdad utilizando la notación de intervalos y represente sobre la recta de números reales.

a) $0 \leq x \leq 4$ b) $-1 < x < 5$ c) $4 \leq x < 6$ d) $-2 < x \leq 0$

Enfoquemos nuestra atención al inciso b). El mismo, propone una desigualdad en una variable, y resolverla significa encontrar todos los valores de la variable para los cuales ese enunciado es verdadero. Siguiendo los pasos propuestos en el instructivo para resolver una situación, analicemos el enunciado. En él se propone expresar la desigualdad planteada utilizando la notación de intervalos.

¿Qué es un intervalo? ¿Podrías expresarlo con tus palabras?

¿Qué tipo de intervalo es el expresado en la desigualdad?

Lee la desigualdad y escríbela con tus palabras.

¿Cómo ha sido tu lectura? ¿Ha sido de la manera siguiente?

*"Menos uno es menor que equis, menor que cinco".*

Otra manera de hacerlo es:

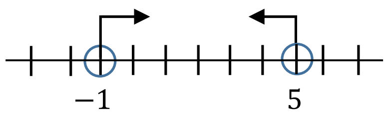
*"Equis es mayor que menos uno y equis es menor que cinco".*

O tal vez de ésta:

*"El conjunto de todos los números reales mayores que menos uno y menores que cinco".*

¿Las tres maneras son equivalentes? Sí, lo son; sólo que una de ellas te permite identificar los elementos del conjunto solución y expresar la desigualdad como $(-1,5)$, que es el convenio adoptado para expresar un intervalo abierto (recuerda que se utilizan corchetes para cuando el intervalo es cerrado, y una combinación de ambos cuando el intervalo es semiabierto o semicerrado).

Otra forma de expresarlo es utilizar la recta numérica, identificando los extremos con un punto vacío, en este caso, por ser éste un intervalo abierto y un punto lleno cuando el intervalo es cerrado.




Utiliza esta manera para resolver situaciones similares.

I-07 Escribe cada enunciado como una desigualdad.

a) $x$ es positivo.
b) $z$ es negativo.
c) $x$ es menor que $2$.
d) $y$ es mayor que $-5$.
e) $x$ es menor o igual a $1$.
f) $x$ es mayor o igual a $2$.
g) $x$ es menor que $5$ y mayor que $2$.
h) $y$ es menor o igual a $2$ y mayor que $0$.

I-08 Escribe cada intervalo como una desigualdad que involucre a la variable $x$ y represéntalos sobre la recta de los números reales.

a) $[2, 5]$ b) $(1,2)$ c) $[4, \infty)$ d) $(-\infty, 2]$

I-09 Indica verdadero o falso, encerrando en un círculo la respuesta correcta.

| | | |
|---|---|---|
| a) Los números racionales son números reales. | V | F |
| b) Si $a < 0$, entonces $\lvert a \rvert = a$. | V | F |
| c) $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$. | V | F |

I-10 Encuentra el valor de cada expresión si $x = 2$ e $y = -3$.

a) $|x + y|$ b) $|x - y|$ c) $|x| + |y|$ d) $|x| - |y|$

## RAZONES Y PROPORCIONES

I-11 Dos ruedas están unidas por una correa transmisora. La primera tiene un radio de $25cm$ y la segunda de $75cm$. Cuando la primera ha dado 300 vueltas, ¿cuántas vueltas habrá dado la segunda?

I-12 El dueño de una papelería ha abonado una factura de $6700 por un pedido de 25 cajas de folios.

a) ¿A cuánto ascenderá la factura de un segundo pedido de 17 cajas?

b) ¿Cuántas cajas recibirá en un tercer pedido que genera una factura de $9380?

I-13 Una finca tiene un cerco antiguo sostenido por 650 postes que están colocados con intervalos de $1{,}20m$ ¿Cuántos postes se necesitarán para la nueva cerca, en la que los postes se colocarán con intervalos de $1{,}30m$?

I-14 Supongamos que en una población, la proporción de analfabetos es de $\frac{1}{300}$. Esto quiere decir que, de cada 300 individuos, 1 es analfabeto, es decir, no sabe leer ni escribir. Si esa población tiene 6 000 000 de habitantes, ¿cuántas personas saben leer y escribir?

Se plantea una ecuación que permita encontrar el número de analfabetos que hay, usando la información que ya se tiene: por cada 300 habitantes, uno es analfabeto.

$$\frac{1}{300} = \frac{x}{6\,000\,000}$$

$$\frac{6\,000\,000}{300} = \frac{6.10^6}{3.10^2} = 2.10^4 = 20\,000$$

Luego, hay 20 000 analfabetos. Por lo tanto, el número de individuos que saben leer y escribir, se puede obtener como:

$$6\,000\,000 - 20\,000 = 5\,980\,000$$

Es decir, 5 980 000 personas saben leer y escribir en esa población.

I-15 En una granja avícola hay 300 gallinas que se comen un camión de grano en 20 días. Si se compran 100 gallinas más, ¿en cuánto tiempo comerán la misma cantidad de grano?

I-16 De las siguientes tablas determina cuál o cuáles representan algún tipo de proporcionalidad (directa o inversa). Justifica tu respuesta.

a)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| $y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

b)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 |
| $y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

c)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 4 | 5 | 10 | 20 |
| $y$ | 20 | 5 | 4 | 2 | 1 |

d)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 18 | 15 | 13 | 10 | 9 |
| $y$ | 20 | 15 | 14 | 2 | 1 |

I-17 Se sabe que la altura y la sombra de cualquier edificio son proporcionales. Si la sombra de un edificio de $30m$ es $8m$, ¿qué altura tendrá otro edificio cuya sombra en el mismo momento mide $12m$?

I-18 Nelson trabaja de delivery en un negocio de comidas, y cobra una suma fija por cada pedido que lleva a un cliente. Sabiendo que el último fin de semana cobró $\$7520$ por llevar $47$ pedidos, ¿cuántos pedidos deberá llevar si desea alcanzar los $\$10000$ el próximo fin de semana?

I-19 Un vehículo ha recorrido una distancia determinada en dos horas y media, avanzando a una velocidad constante de $80km/h$. Si recorre la misma distancia avanzando a una velocidad constante de $100\ km/h$, ¿Cuánto tiempo tardará?

I-20 Para construir una casa en ocho meses han sido necesarios seis albañiles. ¿Cuántos albañiles hubieran sido necesarios para construir la misma casa en tres meses?

I-21 El sonido recorre $340$ metros por segundo. Durante una tormenta se ha oído un trueno $11$ segundos después de verse el relámpago ¿A qué distancia se produjo el rayo?

I-22 Un automóvil consume $9\ litros$ de nafta por cada $100km$ recorridos. Si recorre $837km$, ¿cuántos litros de nafa consumirá?

I-23 Una familia está haciendo salsa de tomate para envasar. Si emplea frascos de $500cm^3$, ocupará $48$ envases. Si la familia decide emplear envases de $750cm^3$, ¿cuántos frascos necesitará para envasar la misma cantidad de salsa?

I-24 Benjamín está planeando hacer en el patio de su casa un sendero de una baldosa de ancho. Ha calculado que, si utiliza baldosas cuadradas de $30\ cm$ de lado, necesita comprar $18$ baldosas.

a) Si las ocho baldosas cuestan $920 ¿cuánto abonará por las 18 baldosas?
b) Si decide colocar baldosas cuadradas de 40 cm de lado ¿cuántas tendrá que comprar?

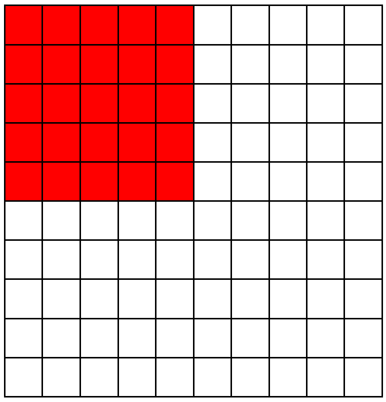
I-25 Marca con una cruz, la respuesta correcta.

Para envasar una partida de aceite de oliva se utilizarán $200$ botellas de $0{,}75$ litros de capacidad cada una. ¿De qué capacidad tendrían que ser las botellas para envasar la misma cantidad en $300$ botellas?

a) 1,125 litros. ☐
b) 0,125 litros. ☐
c) 0,5 litros. ☐
d) 0,75 litros ☐
e) Faltan datos para decidir. ☐

I-26 Romina está preparándose para un examen de Matemática. Ha encontrado un cuadernillo con una buena cantidad de ejercicios. Ha calculado que, si hace ocho ejercicios por día, tardará nueve días en resolverlos a todos. ¿A lo largo de qué día terminará con todos los ejercicios, si resuelve diez por día?

## PORCENTAJE



¿Cuántas partes están coloreada?

Están coloreadas 25 de 100. Es decir, la parte coloreada es el 25%.

I-27 Expresa en forma decimal y fraccionaria.

| Porcentaje | fracción | decimal | por mil ‰ |
|---|---|---|---|
| 52% | | | |
| 28% | | | |
| 54% | | | |
| 4% | | | |

I-28 Transforma a porcentaje.

a) 0,82

b) 1,25

c) 0,75

I-29 Encuentra el porcentaje indicado de las siguientes cantidades.

a) 20% de 45.

b) 4% de 125.

c) 82% de 25000.

d) 15% de 3000000.

e) 30% de 50000.

I-30 El importe de una factura de servicio telefónica es de $6850. Si por pagarla fuera de término tiene un recargo del 15%.

a) ¿Cuál es el recargo?

b) ¿Cuánto debe abonarse?

I-31 En una clase hay 28 alumnos. La siguiente tabla muestra la cantidad aprobados en la evaluación anterior de cada materia. Calcula el porcentaje de aprobados en cada caso (redondea al entero).

| Asignaturas | Cantidad de estudiantes aprobados | Porcentaje de estudiantes aprobados |
|---|---|---|
| Lengua | 17 | |
| C. Naturales | 19 | |
| C. Sociales | 24 | |

I-32 Al llegar Julio, una tienda tiene que cambiar las etiquetas de las prendas.

a. Completa la tabla siguiente considerando un descuento del 20%.

| **Artículo** | **Precio Original** | **Descuento** | **Precio Final** |
|---|---|---|---|
| Pantalón | $3440 | | |
| Camisa | $4500 | | |
| Saco | $8480 | | |
| Pantalón | $4920 | | |
| Remera | $1320 | | |

b. Si a los precios rebajados un 20% los vuelven a rebajar en agosto un 15%, ¿equivale esto a rebajar los precios originales un 35%? Justifica tu respuesta.

I-33 Juan tiene que pagar $90000. Si le rebajan el 5% de su deuda, ¿cuánto tiene que pagar todavía?

a) $450 ( )
b) $4550 ( )
c) $85500 ( )
d) $89500 ( )
e) Ninguna de las anteriores ( )

I-34 Un hombre al morir dispone que sus ahorros consistentes en 31200 dólares, se repartan de la siguiente manera: un 35% a su hermano mayor, el 40% del resto a su hermano menor y lo restante a su ahijado. ¿Cuántos dólares le corresponden a este último?

a) 8112 ( )
b) 12480 ( )
c) 7800 ( )
d) 12168 ( )
e) Ninguna de las anteriores ( )

I-35 Un ganadero tiene en su almacén 15000 kg de trigo después de la cosecha. Si a los 5 meses ha gastado 10200 kg.

a) ¿Qué porcentaje de trigo ha gastado?
b) ¿Qué porcentaje le queda?

I-36 Francisco compró mercadería y, por pagar con tarjeta de débito, le efectuaron un 15% de descuento. Si abonó $2087,94; ¿cuál era el precio original de la compra?

I-37 Mariana pagó la factura de la luz fuera de término, por lo que le cobraron un 12% de recargo, y terminó abonando $2744 ¿Cuál era el precio original de la factura?

I-38 Rocío compró una remera y pagó $1560, porque en el negocio estaba toda la ropa rebajada un 20%. ¿Cuánto dinero se ahorró Rocío?

I-39 Marcelo compró un pantalón que salía $5370, pero por pagarlo con tarjeta de crédito, terminó abonando $6336,6. ¿Cuál es el porcentaje de recargo que pagó Marcelo?

I-40 Micaela compró un par de zapatillas en una liquidación a $7191,6; por lo que se ahorró $2028,4 respecto de lo que salía originalmente. ¿Cuál es el porcentaje de descuento que obtuvo Micaela?

I-41 Belén compró útiles escolares en la librería. Por pagar con tarjeta de crédito, le efectuaron un recargo del 16%, por lo que terminó abonando $794,60 ¿Cuál era el precio original de la compra?

I-42 Florencia compró una remera para regalarle a la madre en su cumpleaños. Por pagar al contado le realizaron un descuento del 14%, por lo que terminó abonando $2081,2. ¿Cuál era el precio original de la prenda?

I-43 Fernando pagó por la cuota de un préstamo $2008,8; puesto que, por abonarlo fuera de término, le cobraron un recargo de $148,8 ¿Cuál es el porcentaje de incremento que le cobraron?

I-44 Luciana compró mercaderías en el almacén. El precio total del pedido era de $3125, pero por pagarlo con tarjeta de débito, le efectuaron un descuento del 16%. ¿Cuánto abonó finalmente?

I-45 Alexis ha comprado en el supermercado hamburguesas y condimentos para celebrar su cumpleaños. Por el medio de pagó que utilizó, le efectuaron un 16% de descuento, con lo que terminó abonando $1559,25. ¿Cuál era el precio original de la compra?

I-46 El supermercado *El Económico* ha promocionado desde la semana pasada un descuento del 15% para todos los clientes que abonen sus compras con tarjeta de débito. Mailén, realizó ayer una compra con su tarjeta de débito, por la que terminó abonando $1613,47 ¿Cuál era el precio original de la compra?

a) $1898,20 ☐

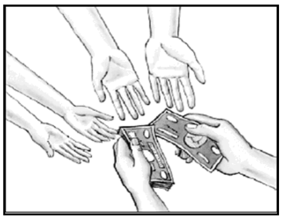
b) $1371,45 ☐

c) $1855,49 ☐

d) $284,73 ☐

e) Ninguna de las opciones es correcta ☐

## REPARTICIÓN PROPORCIONAL



I-47 Cuatro amigas Martha, Patricia, Lorena, y María hicieron un viaje juntas. Reunieron el dinero que cada una tenía \$60000 de Martha, \$70000 de Patricia, \$90000 de Lorena y \$80000 de María. Al regresar les quedaron \$15000, y decidieron repartirlo de manera proporcional al monto que cada una aportó. ¿Cuánto le corresponde a cada una de las amigas?

1° Sumar las cantidades: $60000 + 70000 + 90000 + 80000 = 300000$

2° Sacar el porcentaje que cada una aportó con respecto al total:

$\frac{60000}{300000} = \frac{x}{100} \rightarrow \boldsymbol{x = 20}\%$ $\frac{70000}{300000} = \frac{x}{100} \rightarrow \boldsymbol{x = 23}\%$

$\frac{90000}{300000} = \frac{x}{100} \rightarrow \boldsymbol{x = 30}\%$ $\frac{80000}{300000} = \frac{x}{100} \rightarrow \boldsymbol{x = 27}\%$

3° Calcular la cantidad que cada porcentaje representa de \$15000:

De \$300000, Martha aportó el 20%. Luego: $15000 \cdot 0{,}20 \rightarrow \boldsymbol{le\ tocan}\ \$\mathbf{3000}$

De \$300000, Patricia aportó el 23%. Luego: $15000 \cdot 0{,}23 \rightarrow \boldsymbol{le\ tocan}\ \$\mathbf{3450}$

De \$300000, Lorena aportó el 30%. Luego: $15000 \cdot 0{,}30 \rightarrow \boldsymbol{le\ tocan}\ \$\mathbf{4500}$

De \$300000, María aportó el 27%. Luego: $15000 \cdot 0{,}27 \rightarrow \boldsymbol{le\ tocan}\ \$\mathbf{4050}$

I-48 Juan, Pedro y Camilo aceptaron un trabajo y decidieron que cada uno cobraría de acuerdo con las horas trabajadas. Cuando terminaron, habían anotado: "Juan 20 horas, Pedro 12 horas y Camilo 8 horas". Cuando recibieron \$80000 como pago total debían hacer una repartición proporcional, de manera que cada uno recibiera una cantidad conforme al tiempo trabajado.

I-49 Tres socios han iniciado un negocio con los siguientes capitales: 50000 euros, 80000 euros y 100000 euros. Al cabo de un año queda un beneficio de 460000 euros. ¿Cómo debe repartirse este beneficio?

I-50 Se desea repartir la cantidad de \$120000 de gratificación entre departamentos de una tienda, en proporción a la productividad. El primer departamento (M) produjo \$200000, el segundo (N) \$400000 y el tercero (O) \$600000. ¿Cuánto le corresponde a cada departamento?

I-51 Los dos mozos de un bar se reparten al final del mes los \$12600 de propina, de forma inversamente proporcional al número de días que han faltado. Si uno de los mozos ha faltado tres días y el otro cinco, ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

I-52 El director de la empresa en la que trabajan Juan, Sergio y Andrés desea repartirles un premio de \$72000, proporcionalmente a los años que llevan trabajando en la oficina. Cada uno de ellos lleva 3, 6 y 9 años, respectivamente. ¿Cuánto recibirá cada uno?

I-53 Un abuelo reparte 450 € entre sus tres nietos de 8, 12 y 16 años de edad; proporcionalmente a sus edades. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

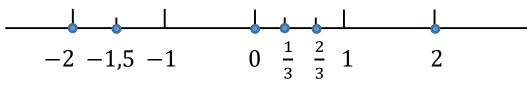
I-54 Una constructora ha encargado el pintado de un complejo de edificios a tres empresas diferentes. La empresa A pinta siete edificios, la empresa B nueve edificios y la empresa C seis edificios. Si el dinero total destinado a la pintura del complejo es de \$3300000, ¿cuánto le corresponde a cada empresa?

## 1.1 RESPUESTAS de CONJUNTO NUMÉRICOS

**I-01** a) $>$ b) $<$ c) $>$ d) $<$ e) $>$

f) $>$ g) $=$ h) $>$ i) $<$ j) $=$

**I-02** a)




b) $-2\,;-1{,}5\,;0\,;\frac{1}{3};\frac{2}{3};2$

**I-03** a) $1$ b) $9$ c) $\frac{1}{16}$ d) $-9$ e) $\frac{4}{9}$ f) $-\frac{64}{125}$

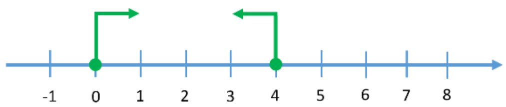
g) $\frac{1}{9}$ h) $\frac{9}{4}$ i) $324$ j) $27$ k) $9$ l) $-\frac{2}{3}$

**I-04** a) $V$ b) $F$ c) $F$ d) $F$ e) $F$ f) $F$ g) V h) V i) $F$ j) $F$

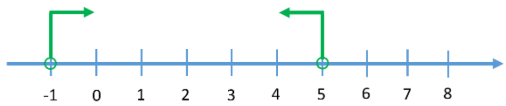
**I-05** a) $F$ b) $V$ c) $F$ d) $F$ e) $F$ f) $F$ g) $V$

h) $V$ i) $V$ j) $F$ k) $V$ l) $F$ m) $F$ n) $V$

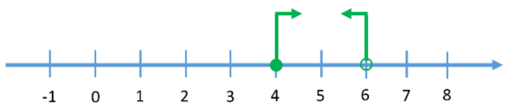
**I-06** a) $[0{,}4]$



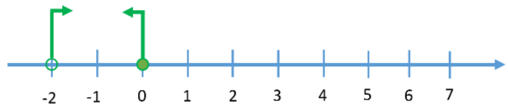

b) $(-1{,}5)$




c) $[4{,}6)$



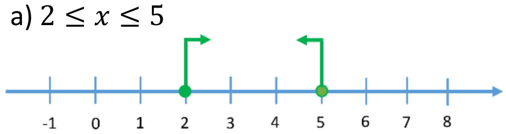

d) $(-2{,}0]$



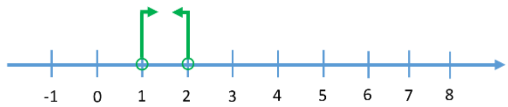

**I-07** a) $x > 0$ b) $z < 0$ c) $x < 2$ d) $y > -5$

e) $x \leq 1$ f) $x \geq 2$ g) $2 < x < 5$ h) $0 < y \leq 2$

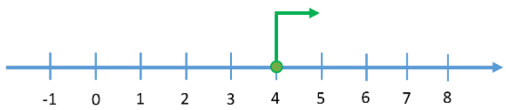
**I-08** a) $2 \leq x \leq 5$



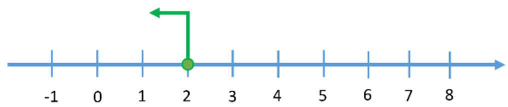

b) $1 < x < 2$




c) $x \geq 4$




d) $x \leq 2$




**I-09** a) V b) F c) V

**I-10** a) $1$ b) $5$ c) $5$ d) $-1$

**I-11** La rueda de $75cm$ de radio habrá dado $100$ vueltas.

**I-12** a) Deberá pagar por 17 cajas \$4556.

b) Recibirá 35 cajas.

I-13 Se necesitarán 600 postes.

I-14 5 980 000 personas saben leer y escribir en esa población.

I-15 Tardarán 15 días.

I-16 a) Proporcionalidad directa. Si se efectúa para cada una de las columnas el cociente $\frac{x}{y}$; resulta siempre 5.

b) Ningún tipo de proporcionalidad. No existe proporcionalidad directa. Si se efectúa el cociente de la primera columna, resulta 2; mientras que al realizar el cociente entre los valores de la segunda columna, resulta 1,5.

Tampoco existe proporcionalidad inversa, basta observar también las dos primeras columnas. El producto de los valores de la primera columna resulta 2, mientras que el producto de los valores de la segunda columna resulta 6.

c) Proporcionalidad inversa. Al efectuar para cada una de las columnas el producto $x \cdot y$, siempre resulta 20.

d) Ningún tipo de proporcionalidad. Basta observar las dos primeras columnas para ver que no existe una constante de proporcionalidad, ni directa $\left(\frac{18}{20} \neq \frac{15}{15}\right)$, ni inversa $(18 \cdot 20 \neq 15 \cdot 15)$.

I-17 La altura del otro edificio será de $45m$.

I-18 Debe llevar por lo menos 63 pedidos.

I-19 A $100k/h$ el vehículo recorrerá la distancia en 2 horas.

I-20 Hubieran sido necesarios 16 albañiles.

I-21 El rayo se produjo a 3740 $metros$.

I-22 El automóvil consumirá 75,33 $litros$ de nafta.

I-23 Necesitará 32 envases.

I-24 a) Las 18 baldosas le costarán $2070.

b) Tendrá que comprar 14 baldosas.

I-25 Opción c)

I-26 Terminará a lo largo del octavo día.

I-27

| Porcentaje | Fracción | Decimal | Por mil |
|---|---|---|---|
| 52% | $\frac{52}{100}$ | 0,52 | 520‰ |
| 28% | $\frac{28}{100}$ | 0,28 | 280‰ |
| 54% | $\frac{54}{100}$ | 0,54 | 540‰ |
| 4% | $\frac{4}{100}$ | 0,04 | 40‰ |

I-28 a) 82% b) 125% c) 75%

I-29 a) 9 b) 5 c) 20500 d) 450000 e) 15000

I-30 a) $1027,5 b) $7877,5

I-31 Lengua: 61% C. Naturales: 68% C. Sociales: 86%

I-32 a)

| Artículo | Precio Original | Descuento | Precio Final |
|---|---|---|---|
| Pantalón | $3440 | $688 | $2752 |
| Camisa | $4500 | $900 | $3600 |
| Saco | $8480 | $1696 | $6784 |
| Pantalón | $4920 | $984 | $3936 |
| Remera | $1320 | $264 | $1056 |

b) No es equivalente, puesto que el 15% de agosto está aplicado sobre un total menor al original. Por ejemplo, para el caso del pantalón, el 35% del valor original resulta $1204, con lo que se terminaría abonando $2236. Por otro lado, al calcular el 15% del precio final de julio, resulta $412,8; con lo que se terminaría abonando $2339,2 (diferente al obtenido en el otro supuesto).

I-33 Inciso $c$)

I-34 Inciso $d$)

I-35 a) Ha gastado el 68% del trigo.

b) Le queda el 32% del trigo.

I-36 El precio original de la compra era de $2456,4.

I-37 El precio original de la factura era de $2450.

I-38 Rocío se ahorró $390.

I-39 Marcelo pagó 18% de recargo.

I-40 Micaela obtuvo 22% de descuento.

I-41 El precio original de la compra era de $685.

I-42 El precio original de la prenda era de $2420.

I-43 Le cobraron un 8% de incremento.

I-44 Finalmente abonó $2625.

I-45 El precio original de la compra era de $1856,25.

I-46 Opción a)

I-47 A Martha le tocan $3000, a Patricia $3450, a Lorena $4500 y a María $4050.

I-48 Camilo recibe $16000, Pedro $24000 y Juan $40000.

I-49 Beneficio del socio 1: 100000 euros.

Beneficio del Socio 2: $160000$ euros.

Beneficio del Socio 3: $200000$ euros.

I-50 M recibirá \$20000, N \$40000 y O \$60000.

I-51 El mozo que faltó tres días recibirá \$7875 y el que faltó cinco días \$4725.

I-52 Juan recibirá \$12000, Sergio \$24000 y Andrés \$36000.

I-53 El nieto de 8 años recibirá 100€, el de 12 años 150 €, y el de 16 años 200€.

I-54 La empresa A recibirá \$1050000, la empresa B recibirá \$1350000 y la empresa C recibirá \$900000.

# 2. ECUACIONES E INECUACIONES

## ECUACIONES

II-01 Despeja la variable indicada en cada uno de los siguientes casos.

1) $PV = nRT$ $(despeja\ R)$

2) $F = G\frac{mM}{r^2}$ $(despeja\ m)$

3) $P = 2l + 2w$ $(despeja\ w)$

4) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $(despeja\ r)$

5) $a - 2[b - 3(c - y)] = 6$ $(despeja\ y)$

6) $F = G\frac{mM}{r^2}$ $(despeja\ r)$

7) $A = P\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2$ $(despeja\ i)$

8) $\frac{ax+b}{cx+d} = 2$ $(despeja\ x)$

9) $a^2m + (a - 1) = (a + 1)m$ $(despeja\ m)$

10) $I = \frac{nE}{R+nr}$ $(despeja\ n)$

11) $T = \frac{W(u^2-2gL)}{gL}$ $(despeja\ L)$

12) $a = \frac{2bz}{1+b(z-1)}$ $(despeja\ z)$

II-02 Resuelve las siguientes ecuaciones lineales. Verifica si los valores hallados son soluciones de la ecuación en cada caso.

1) $6 - x = 2x + 9$

2) $2(3 + 2p) = 3(p - 4)$

3) $8m - (2m + 1) = 3m - 10$

4) $0{,}9t = 0{,}4 + 0{,}1t$

5) $\frac{1}{2}k - 4 = \frac{3}{4}k$

6) $\frac{2}{3}z + \frac{1}{2}(z - 3) = \frac{z+1}{4}$

7) $\frac{3}{2}(2 - s) - 1 = \frac{3}{4}(s - 1)$

8) $\frac{5}{3}(f - 6) = \frac{9}{2}(f - 4)$

9) $2r - \frac{r}{2} + \frac{r+1}{4} = 6r$

10) $y - \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}y - 5 = 0$

11) $\frac{w}{3} - \frac{w+1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3} + w\right)$

12) $\frac{7}{3}c - \frac{2}{5}\left(1 - \frac{5}{3}c\right) = \frac{1}{4}c - \frac{3}{2}(4 - 2c)$

II-03 Encuentra, si existen, las soluciones reales de las siguientes ecuaciones cuadráticas. Verifica si los valores hallados son soluciones de la ecuación en cada caso.

1) $p^2 - 7p + 12 = 0$

2) $3x^2 + 5x = 2$

3) $-t^2 - 4t + \frac{9}{4} = 0$

4) $r^2 = \frac{3}{4}r - \frac{1}{8}$

5) $5y + \frac{13}{8} = -4y^2$

6) $-2m^2 - 1 = 8m$

7) $6z(z - 1) = 21 - z$

8) $3 + 5c + c^2 = 0$

9) $\frac{2}{3}k - \frac{k+1}{2} + \frac{1}{3} = k\left(k - \frac{11}{6}\right) + \frac{5}{6}$

10) $\frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}n - 10\right) + n\left(\frac{8}{5} + 2n\right) = -7$

11) $b(3 - b) + 2 = (9 - 2b)b + 1$

12) $s(12 - 4s) - 5(s - 3) = 3s(7s - 21) + 64$

II-04 Encuentra, si existen, las soluciones reales de las siguientes ecuaciones racionales. Verifica si los valores hallados son soluciones de la ecuación en cada caso.

1) $\frac{3}{2t-3}=\frac{2}{t+5}$

2) $\frac{6m+7}{4m-1}=\frac{3m+8}{2m-4}$

3) $\frac{4}{y}-5=\frac{5}{2y}$

4) $\frac{x}{x-3}+3=\frac{3}{x-3}$

5) $\frac{2}{p-2}=\frac{3}{p+5}+\frac{10}{(p+5)(p-2)}$

6) $\frac{2w+1}{w+2}=\frac{4}{5}$

7) $\frac{r}{r^2-9}+\frac{1}{r+3}=\frac{3}{r^2-9}$

8) $\frac{3}{f+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3f+3}$

9) $\frac{1}{n}=\frac{4}{3n}+1$

10) $\frac{4}{k-1}+\frac{2}{k+1}=\frac{35}{k^2-1}$

11) $\frac{c-1}{2-c}=\frac{c+3}{c-4}$

12) $\frac{1}{3z}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2z}-\frac{1}{z}$

II-05 Encuentra, si existen, las soluciones reales de las siguientes ecuaciones con valor absoluto. Verifica si los valores hallados son soluciones de la ecuación en cada caso.

1) $|2m|=6$

2) $|2t+3|=5$

3) $|z-4|=0{,}01$

4) $|3p+5|=1$

5) $3|1-4b|=5$

6) $|w-6|=-1$

7) $\left|\frac{5+3a}{2}\right|=12$

8) $-\left|\frac{7}{3}d-6\right|=-8$

9) $12-|3p+2|=-7$

10) $|5c+2|=|6-3c|$

11) $|5-3y|+|4+y|=0$

12) $|5-3r|-|2r-5|=0$

II-06 Encuentra, si existen, las soluciones reales de las siguientes ecuaciones que involucran radicales. Verifica si los valores hallados son soluciones de la ecuación en cada caso.

1) $\sqrt{2x+1}+1=x$

2) $2m+\sqrt{m+1}=8$

3) $\sqrt{5-p}+1=p-2$

4) $t-5\sqrt{t}+6=0$

5) $\sqrt{\sqrt{k-5}+k}=5$

6) $\sqrt[3]{3s-3}=3$

7) $\sqrt{3r+1}-2=r$

8) $(2b+12)^{1/2}-b=2$

9) $15-2(3y-2)^{\frac{1}{2}}=y-4$

10) $8-(3z-4)^{1/3}=12$

11) $(n+5)^{1/2}-5=n$

12) $11-(d-5)^{1/2}=d$

II-07 Encuentra todas las soluciones reales de las siguientes ecuaciones. Verifica si los valores hallados son soluciones de la ecuación en cada caso.

1) $w(4-w^2)=8-w^3$

2) $x^2=9x$

3) $t^3-6t^2+5t=0$

4) $(p+7)(p-1)=(p+1)^2$

5) $m(m-7)\ =(2m+1)\ (m-4)$

6) $\frac{1}{r-1}+\frac{1}{r+2}=\frac{5}{4}$

7) $4|y-3|-12=-7$

8) $4\sqrt{16-3z}+21=5z$

9) $\frac{10}{k}-\frac{12}{k-3}+4=0$

10) $5-3\left|\frac{5}{3}-4n\right|=-8$

11) $3\sqrt{7+3s}-9=s$

12) $\frac{3}{d-3}=\frac{1}{d-3}-\frac{1}{d}$

II-08 Dada la ecuación lineal:

$$\mathbf{5-3x=17}$$

Al despejar la incógnita $x$, se puede llegar a:

a) $x=\frac{17}{-3}-5$ ☐

b) $x=\frac{17-5}{-3}$ ☐

c) $x=\frac{17-5}{3}$ ☐

d) $x=\frac{17+5}{3}$ ☐

e) No se puede llegar a ninguna de las otras opciones. ☐

## LOGARITMO

II-09 Cambia cada expresión exponencial por una expresión equivalente con un Logaritmo.

a) $9=3^2$

b) $16=4^2$

c) $1{,}6=a^2$

d) $a^3=2{,}1$

e) $1{,}1^2=M$

f) $2{,}2^3=N$

g) $2^x=7{,}2$

h) $3^x=4{,}6$

i) $x^{\sqrt{2}}=\pi$

j) $e^x=8$

k) $e^{2{,}2}=M$

l) $z^{-1{,}5}=P$

II-10 Determina el valor exacto de cada logaritmo sin utilizar calculadora.

a) $log_2 1=$

b) $log_3\left(\frac{1}{9}\right)=$

c) $log_{10}\sqrt{10}=$

d) $log_{\sqrt{2}}4=$

e) $log_8 8=$

f) $log_{\frac{1}{2}}16=$

g) $log_5\sqrt[3]{25}=$

h) $\ln\sqrt{e}=$

i) $\ln e=$

j) $\ln e^3=$

k) $\log_3 81=$

$l)$ $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[5]{\frac{1}{81}}=$

II-11 Considera que $ln\ 2 = a$ y $ln\ 3 = b$. Utiliza las propiedades de los logaritmos para escribir cada logaritmo en términos de $a$ y $b$.

a) $ln\ 6 =$

b) $ln\frac{2}{3}$

c) $ln\ 1{,}5 =$

d) $ln\ 2e =$

e) $ln\ 12 =$

f) $log_2\ 3 =$

II-12 Usa las propiedades de logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones.

a) $log_2(2x) =$

b) $log_3\left(\frac{a^2}{c^5}\right) =$

c) $ln\left(x^2\sqrt{1-x}\right) =$

d) $log_a\left(\frac{x^2}{yz^3}\right) =$

e) $log_3\left(\sqrt[5]{7m^2p}\right) =$

f) $ln\left(\sqrt{\frac{t-1}{t+3}}\right) =$

g) $ln\left(\left[\frac{x^2-x-2}{(x+4)^2}\right]^3\right) =$

h) $log\left(\frac{k\sqrt{1-3k}}{(k-4)^3}\right) =$

i) $ln\left(\sqrt[4]{\frac{2-p}{(p-1)(p+3)}}\right) =$

II-13 Usa las propiedades de logaritmos para combinar las siguientes expresiones.

a) $3log_5(u) + 4log_5(v) =$

b) $\frac{1}{3}log_2(x) - 2log_2(t) =$

c) $\frac{1}{4}[ln(z) + ln(p) - ln(y)] =$

d) $\frac{1}{3}[log_4(m) - 2log_4(x)] =$

e) $\frac{1}{2}ln(z) - [ln(x) + 2ln(t)] =$

f) $\frac{1}{3}log(t+1) - \frac{1}{2}log(t-1) =$

g) $2log_a(x) - \frac{1}{2}log_a(2x+3) =$

h) $\frac{1}{4}[ln(m) + 2ln(z) - 3ln(p)] =$

i) $3\left[\frac{1}{4}log(r-1) - 2log(s+2)\right] =$

II-14 Utiliza la fórmula de cambio de base y una calculadora para evaluar cada logaritmo. Redondea la respuesta al milésimo.

a) $log_3(21) =$

b) $log_5(18) =$

c) $log_{\sqrt{2}}(7) =$

d) $log_\pi(e) =$

II-15 Utiliza la fórmula de cambio de base (con logaritmo decimal) y determina el valor de la siguiente expresión sin uso de calculadora.

$$log_2(3) \cdot log_3(4) \cdot log_4(5) \cdot log_5(6) \cdot log_6(7) \cdot log_7(8) =$$

## ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

II-16 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales. Redondea la respuesta al milésimo. Verifica si los valores hallados son soluciones de la ecuación en cada caso.

1) $8^{6+3p} = 4$

2) $4^{1-2m} = 2$

3) $e^{1-t} = 5$

4) $5^b = 3^{b+2}$

5) $2^z \cdot 5 = 10^z$

6) $4^{k-k^2} = \frac{1}{2}$

7) $3^{n^2+n} = \sqrt{3}$

8) $4(1 + 10^{5y}) = 9$

9) $3\left(5 - 4^{\frac{1}{2}b}\right) = 7$

10) $\frac{11}{2^{3c}+1} = 6$

11) $\frac{50}{1+e^{-d}} = 4$

12) $\frac{8}{3-2e^{-3x}} = 20$

II-17 Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas. Verifica si los valores hallados son soluciones de la ecuación en cada caso.

1) $log_3(4k-7)=2$

2) $log_3(\sqrt{t-2})=2$

3) $log_{\sqrt{2}}(d)=-6$

4) $2log_5(p)=log_5(9)$

5) $log(7z-12)=2logz$

6) $log_2(m^2-m-2)=2$

7) $log_4(b+3)+log_4(2-b)=1$

8) $3log_2(r-1)+log_2 4=5$

9) $log_2 3+log_2 y=log_2 5+log_2(y-2)$

10) $log_5(x+1)-log_5(x-1)=2$

11) $log_2(2n)+log_2(2n+7)=3$

12) $2log(k)-log(20-k)=1$

II-18 Resuelve las siguientes ecuaciones. Redondea la respuesta al milésimo. Verifica si los valores hallados son soluciones de la ecuación en cada caso.

1) $e^{1-2m}=4$

2) $5^{y+2}=7^{y-2}$

3) $log_{2w-5}64=3$

4) $\frac{1}{4}log_7(9z)=\frac{1}{2}log_7(z+2)$

5) $log_2(p+2)+log_2(p-1)=2$

6) $log_t 64=-3$

7) $log_5(5r-8)-log_5(1-r)=2$

8) $8=4^{k^2}\cdot 2^{5k}$

9) $\frac{10}{1+e^{-n}}=2$

10) 12$=\frac{23}{1+3e^{-2x}}$

11) $2log_2(b-1)-log_2(b+2)=2$

12) $\frac{11}{3-4e^{-3c}}=5$

## INECUACIONES

Las inecuaciones permiten resolver problemas. Veamos el siguiente ejemplo.

*Una furgoneta pesa* $875$ $kg$*. La diferencia entre el peso de la furgoneta vacía y el peso de la carga que lleve no debe ser inferior que* $415$ $kg$*. Si hay que cargar* $4$ *cajones iguales, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada uno de ellos para poder llevarlos en esa furgoneta?*

*En primer lugar, traducimos el enunciado al lenguaje simbólico, llamamos x al peso de cada cajón y planteamos la siguiente inecuación:*

*Peso de la furgoneta* $-$ *peso de* $4$ *cajones* *no es menor que* $415$ $kg$

$$875 - 4x \geq 415$$

*Una forma de resolver la inecuación es seguir los siguientes pasos:*

$-4x \geq 415-875$ *(restamos* $875$ *a ambos miembros de la desigualdad)*

$-4x \geq -460$ *(hacemos el cálculo en el segundo miembro)*

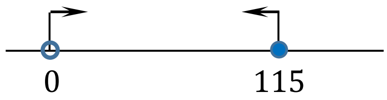
$x \leq \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-460)$ (*multiplicamos a ambos miembros por* $-\frac{1}{4}$)

*(**Recuerda:** como multiplicamos por un número negativo, debemos cambiar el sentido de la desigualdad)*

*Finalmente:* $x \leq 115$

*Esto significa que el peso de cada cajón no podrá superar los* $115\ kg$*. Además, tengamos en cuenta que, como se trata de un peso,* $x$ *debe ser un valor positivo.*

***De acuerdo al valor obtenido, la solución está formada por todos los números reales pertenecientes al intervalo*** $(\mathbf{0}\,,\mathbf{115}]$***. Graficamos la solución en la recta real:***




Veamos a continuación otro ejemplo:

*Dos empresas de alquiler de coches trabajan con las tarifas siguientes (para un determinado modelo de vehículo):*

- ✓ *Empresa **A**:* $50\ dólares/día\ +\ 0{,}15\ dólares/km.$
- ✓ *Empresa **B**:* $60\ dólares/día\ +\ 0{,}10\ dólares/km.$

a) Si queremos alquilar un coche durante un día para hacer $200\ km$, ¿cuánto nos costaría en cada una de ellas?

b) Para alquilar durante 3 días, ¿a partir de cuántos kilómetros resulta más barata la empresa ***B***?

Solución:

*a)* La empresa ***A*** nos cobraría: $50 + 0{,}15 \cdot 200 = 50 + 30 = 80$ *dólares;* en ***B*** tendríamos que pagar $60 + 0{,}10 \cdot 200 = 60 + 20 = 80$ *dólares* también.

*b) Llamaremos* $x$ *al número de kilómetros a recorrer.*

*La empresa **A** cobraría* $150 + 0{,}15 \cdot x$ dólares *mientras que **B** cobraría* $180 + 0{,}10 \cdot x$ dólares.

*Para que resulte más barato en **B**, se debe imponer la condición* $150 + 0{,}15 \cdot x > 180 + 0{,}10 \cdot x$*. Reordenando, resulta:* $0{,}05 \cdot x > 30$.

*Resolviendo, resulta que* $x > 600$.

*Luego, para que, en un alquiler de tres días, resulte más barata **B**, han de recorrerse más de* $600\ km$.

II-19 Dadas las siguientes desigualdades en valor absoluto;

| | | |
|---|---|---|
| a) $\lvert 3x\rvert < 12$ | d) $\lvert 1 - 2p\rvert < 3$ | g) $5\lvert 5y - 20\rvert \leq 15$ |
| b) $\lvert 3z\rvert > 12$ | e) $\lvert b - 3\rvert \geq 2$ | h) $\lvert r + 1\rvert \geq 3$ |
| c) $\lvert 3t - 2\rvert \leq 4$ | f) $\lvert -1 - 2m\rvert < 3$ | i) $-2 + \lvert 2w - 4\rvert \leq 10$ |

I. Resuelve.
II. Expresa analíticamente el conjunto solución.
III. Representa gráficamente.

Nos vamos a detener en el inciso d), siguiendo la misma manera de actuar frente a una situación, observemos la expresión, que como en los casos que hemos venido tratando representa un intervalo.

¿Qué notamos de distinto entre esta expresión y las analizadas?

Resolverla representa otra manera de actuar que nos lleve a una desigualdad similar a las anteriores.

Revisando la definición de valor absoluto (si no lo has hecho hazlo ahora), la expresión planteada se transformaría, ahora sin las barras de valor absoluto en:

……………………………..

¿Cómo encuentra ahora el conjunto de valores de $x$?

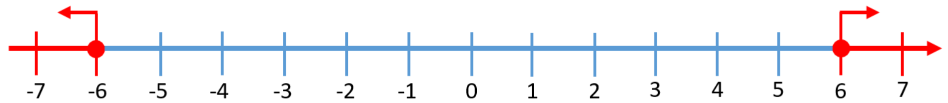
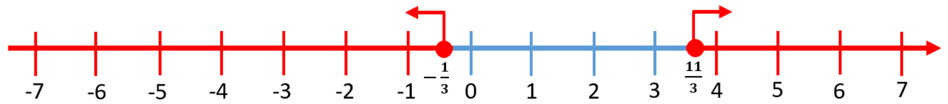
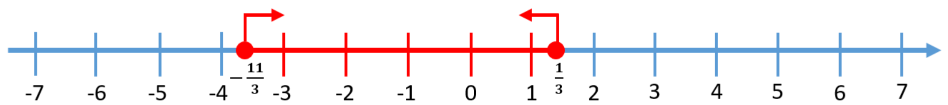
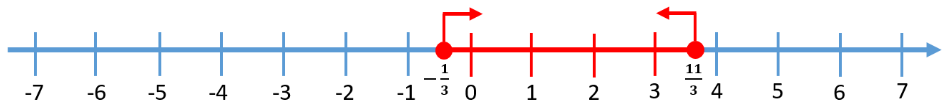
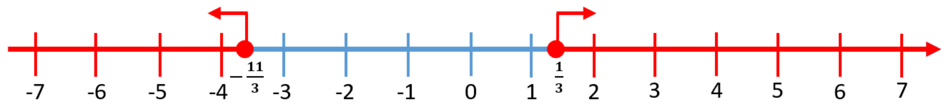
**¡Atención!** Recuerda que cuando se multiplica ambos miembros de una desigualdad por un número negativo, ***cambia*** el sentido de la desigualdad. Por lo tanto, el conjunto solución está dado por:

……………………………..

II-20 Dada la inecuación:

$$|5 - 3x| \geq 6$$

La representación del conjunto solución de la misma está dado por:

| | | |
|---|---|---|
| a) |  | |
| b) |  | |
| c) |  | |
| d) |  | |
| e) |  | |
| f) | Ninguna de las opciones es correcta | |

II-21 Dada la siguiente inecuación:

$$|1 + 2x| > 4$$

a) Resuelva.
b) Escriba analíticamente el conjunto solución.
c) Represente gráficamente el conjunto solución.

II-22 La temperatura normal de cuerpo humano es de $98{,}6°\ F$. Si una temperatura $x$ que difiere de lo normal por al menos $1{,}5°F$ es considerada no sana, escribe la condición para una temperatura no sana $x$ como una desigualdad que involucre valor absoluto, y resuelve para $x$.

II-23 Supongamos que en la clase de economía el rango de notas va desde $0$ a $100$ puntos y que vos obtuviste las siguientes notas: $68, 82, 87,$ y $89$ en los primeros cuatro de cinco exámenes. Para obtener una calificación de ***B***, el promedio de los cinco exámenes debe ser mayor o igual que $80$ y menor que $90$. Resuelve una desigualdad para encontrar el rango de la nota que necesitas en el último examen para obtener una ***B***.

II-24 Las instrucciones en un medicamento indican que éste debe almacenarse a una temperatura entre $5°C$ y $30°C$ ¿a qué rango en la escala Fahrenheit corresponden estas temperaturas?
**Nota**: La relación entre los grados Celsius y Fahrenheit está dada por a la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

II-25 Una fábrica paga a sus viajantes $\$1000$ por artículo vendido más una cantidad fija de $\$50000$. Otra fábrica de la competencia paga $\$1500$ por artículo y $\$30000$ fijos ¿Cuántos artículos debe vender el viajante de la competencia para ganar más dinero que el primero?

II-26 Sabiendo que si $a > 0$,

- el conjunto solución de $x^2 < a$, es $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$
- el conjunto solución de $x^2 > a$, es $\begin{cases} x > \sqrt{a} \\ o\ bien \\ x < -\sqrt{a} \end{cases}$

Resuelve:

| | | |
|---|---|---|
| a) $y^2 < 1$ | c) $z^2 \leq 16$ | e) $p^2 \geq 9$ |
| b) $x^2 < 4$ | d) $w^2 \leq 9$ | f) $t^2 > 4$ |

II-27 Indica verdadero o falso, encerrando en un círculo la respuesta correcta.

| | | |
|---|---|---|
| a) Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican por un número negativo, entonces el sentido de la desigualdad se invierte. | V | F |
| b) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $a \pm c < b \pm c$. | V | F |
| c) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$. | V | F |
| d) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. | V | F |

## 2.1 RESPUESTAS de ECUACIONES E INECUACIONES

II-01

1) $R = \frac{PV}{Tn}$

2) $m = \frac{Fr^2}{GM}$

3) $w = \frac{1}{2}P - l$

4) $r_1 = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}; r_2 = -\sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$

5) $y = \frac{1}{6}a - \frac{1}{3}b + c - 1$

6) $r_1 = \sqrt{\frac{GmM}{F}}; r_2 = -\sqrt{\frac{GmM}{F}}$

7) $i_1 = 100\left(\sqrt{\frac{A}{P}} - 1\right); i_2 = 100\left(-\sqrt{\frac{A}{P}} - 1\right)$

8) $x = \frac{2d-b}{a-2c}$

9) $m = \frac{1-a}{a^2-a-1}$

10) $n = -\frac{IR}{Ir-E}$

11) $L = \frac{Wu^2}{Tg+2Wg}$

12) $z = \frac{a-ab}{2b-ab}$

II-02

1) $x = -1$

2) $p = -18$

3) $m = -3$

4) $t = 0{,}5$

5) $k = -16$

6) $z = \frac{21}{11}$

7) $s = \frac{11}{9}$

8) $f = \frac{48}{17}$

9) $r = \frac{1}{17}$

10) $y = 30$

11) $w = -\frac{20}{11}$

12) $c = \frac{112}{5}$

II-03

1) $p_1 = 3; p_2 = 4$

2) $x_1 = -2; x_2 = \frac{1}{3}$

3) $t_1 = -\frac{9}{2}; t_2 = \frac{1}{2}$

4) $r_1 = \frac{1}{4}; r_2 = \frac{1}{2}$

5) $No\ tiene\ solución\ real$

6) $m_1 = -2 + \frac{\sqrt{14}}{2}; m_2 = -2 - \frac{\sqrt{14}}{2}$

7) $z_1 = -\frac{3}{2}; z_2 = \frac{7}{3}$

8) $c_1 = \frac{-5+\sqrt{13}}{2}; c_2 = \frac{-5-\sqrt{13}}{2}$

9) $k_1 = k_2 = 1$

10) $No\ tiene\ solución\ real$

11) $b_1 = 3 + 2\sqrt{2}; b_2 = 3 - 2\sqrt{2}$

12) $s_1 = s_2 = \frac{7}{5}$

II-04

1) $t = 21$

2) $m = -\frac{20}{39}$

3) $y = \frac{3}{10}$

4) $No\ tiene\ solución$

5) $p = 6$

6) $w = \frac{1}{2}$

7) $No\ tiene\ solución$

8) $f = \frac{13}{3}$

9) $n = -\frac{1}{3}$

10) $k = \frac{11}{2}$

11) $c_1 = 1 + \sqrt{2}; c_2 = 1 - \sqrt{2}$

12) $z = \frac{7}{3}$

II-05 1) $m_1 = 3; m_2 = -3$ 2) $t_1 = 1; t_2 = -4$

3) $z_1 = 3{,}99; z_2 = 4{,}01$ 4) $p_1 = -2; p_2 = -\frac{4}{3}$

5) $b_1 = -\frac{1}{6}; b_2 = \frac{2}{3}$ 6) $No\ tiene\ solución$

7) $a_1 = -\frac{29}{3}; a_2 = \frac{19}{3}$ 8) $d_1 = -\frac{6}{7}; d_2 = 6$

9) $p_1 = -7; p_2 = \frac{17}{3}$ 10) $c_1 = \frac{1}{2}; c_2 = -4$

11) $No\ tiene\ solución$ 12) $r_1 = 0; r_2 = 2$

II-06 1) $x = 4$ 2) $m = 3$

3) $p = 4$ 4) $t_1 = 4; t_2 = 9$

5) $k = 21$ 6) $s = 10$

7) $No\ tiene\ solución$ 8) $b = 2$

9) $y = 9$ 10) $z = -20$

11) $n_1 = -4; n_2 = -5$ 12) $d = 9$

II-07 1) $w = 2$ 2) $x_1 = 0; x_2 = 9$

3) $t_1 = 0; t_2 = 1; t_3 = 5$ 4) $p = 2$

5) $m_1 = -2; m_2 = 2$ 6) $r_1 = 2; r_2 = -\frac{7}{5}$

7) $y_1 = \frac{7}{4}; y_2 = \frac{17}{4}$ 8) $z = 5$

9) $k_1 = -\frac{3}{2}; k_2 = 5$ 10) $n_1 = -\frac{2}{3}; n_2 = \frac{3}{2}$

11) $s_1 = -1; s_2 = 3$ 12) $d = 1$

II-08 Opción b)

II-09 a) $log_3 9 = 2$ e) $log_{1,1} M = 2$ i) $log_x \pi = \sqrt{2}$

b) $log_4 16 = 2$ f) $log_{2,2} N = 3$ j) $\ln 8 = x$

c) $log_a 1{,}6 = 2$ g) $log_2 7{,}2 = x$ k) $ln\, M = 2{,}2$

d) $log_a 2{,}1 = 3$ h) $log_3 4{,}6 = x$ l) $log_z\, P = -1{,}5$

II-10 a) 0 b) $-2$ c) $\frac{1}{2}$ d) 4

e) 1 f) $-4$ g) $\frac{2}{3}$ h) $\frac{1}{2}$

i) 1 j) 3 k) 4 l) $-\frac{8}{5}$

II-11 a) $a + b$ d) $a + 1$

b) $a - b$ e) $2a + b$

c) $b - a$ f) $\frac{b}{a}$

II-12 a) $1 + log_2(x)$ d) $2log_a(x) - [\, log_a(y) + 3\, log_a(z)]$ g) $3[ln(x^2 - x - 2) - 2ln(x + 4)]$

b) $2log_3(a) - 5log_3(c)$ e) $\frac{1}{5}[log_3(7) + 2log_3(m) + log_3(p)]$ h) $log(k) + \frac{1}{2}log(1 - 3k) - 2log(k - 4)$

c) $2ln(x) + \frac{1}{2}ln(1 - x)$ f) $\frac{1}{2}[ln(t - 1) - ln(t + 3)]$ i) $\frac{1}{4}[ln(2 - p) - ln(p - 1) - ln(p + 3)]$

II-13 a) $log_5(u^3v^4)$ d) $log_4\left(\sqrt[3]{\frac{m}{x^2}}\right)$ g) $log_a\left(\frac{x^2}{\sqrt{2x+3}}\right)$

b) $log_2\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{t^2}\right)$ e) $ln\left(\frac{\sqrt{z}}{xt^2}\right)$ h) $ln\left(\sqrt[4]{\frac{mz}{p^3}}\right)$

c) $ln\left(\sqrt[4]{\frac{zp}{y}}\right)$ f) $log\left(\frac{\sqrt[3]{t+1}}{\sqrt{t-1}}\right)$ i) $log\left[\left(\frac{\sqrt[4]{(r-1)}}{(s+2)^2}\right)^3\right]$

II-14 a) 2,771 c) 5,615

b) 1,796 d) 0,874

II-15 3

II-16 1) $p = -1{,}778$ 2) $m = 0{,}25$

3) $t = -0{,}609$ 4) $b = 4{,}301$

5) $z = 1$ 6) $k_1 = -0{,}366;\, k_2 = 1{,}366$

7) $n_1 = -1{,}366;\, n_2 = 0{,}366$ 8) $y = 0{,}019$

9) $b = 1{,}415$ 10) $c = -0{,}088$

11) $d = -2{,}442$ 12) $x = -0{,}087$

II-17 1) $k = 4$ 2) $t = 83$

3) $d = \frac{1}{8}$ 4) $p = 3$

5) $z_1 = 3;\, z_2 = 4$ 6) $m_1 = -2;\, m_2 = 3$

7) $b_1 = -2;\, b_2 = 1$ 8) $r = 3$

9) $y = 5$ 10) $x = \frac{13}{12}$

11) $n = \frac{1}{2}$ 12) $k = 10$

II-18 1) $m = -0{,}193$ 2) $y = 21{,}133$

3) $w = 4{,}5$ 4) $z_1 = 1;\, z_2 = 4$

5) $p = 2$ 6) $t = \frac{1}{4}$

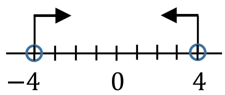
7) $r = \frac{11}{10}$ 8) $k_1 = -3;\, k_2 = \frac{1}{2}$

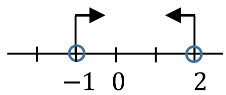
9) $n = -1{,}386$ 10) $x = 0{,}593$

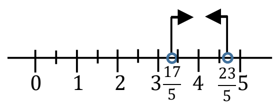
11) $b = 7$ 12) $c = 0{,}536$

II-19 a) I. $-4 < x < 4$ d) I. $-1 < p < 2$ g) I. $\frac{17}{5} < y < \frac{23}{5}$

II. $(-4; 4)$ II. $(-1; 2)$ II. $\left(\frac{17}{5}; \frac{23}{5}\right)$

III. 

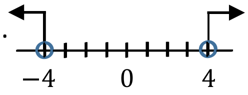
III. 

III. 

b) I. $z < -4 \vee z > 4$

II. $(-\infty; -4) \cup (4;\ \infty)$

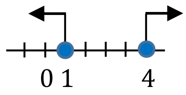
III.




e) I. $b \leq 1 \vee b \geq 5$

II. $(-\infty; 1] \cup [5; \infty)$

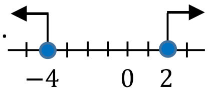
III.




h) I. $r \leq -4 \vee r \geq 2$

II. $(-\infty; -4] \cup [2; \infty)$

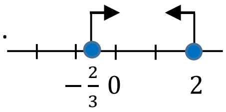
III.




c) I. $-\frac{2}{3} \leq t \leq 2$

II. $\left[-\frac{2}{3}; 2\right]$

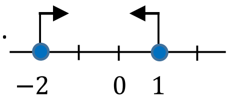
III.




f) I. $-2 < m < 1$

II. $(-2; 1)$

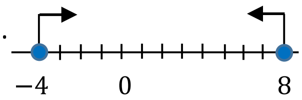
III.




i) I. $-4 \leq w \leq 8$

II. $[-4; 8]$

III.




II-20 Opción b)

II-21 a) $x < -\frac{5}{2} \vee x > \frac{3}{2}$

b) $S = \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

c)


II-22 Temperatura de persona no sana: $|x - 98{,}6| \geq 1{,}5 \rightarrow x \geq 100{,}1°F; o\ bien\ x \leq 97{,}1°F$

II-23 $74 \leq x \leq 100$

II-24 $41 \leq F \leq 86$

II-25 $x > 40$ (considerando a $x$ como la cantidad de artículos que debe vender)

II-26 a) $-1 < y < 1$ c) $-4 \leq z \leq 4$ e) $p \leq -3 \vee p \geq 3$

b) $-2 < x < 2$ d) $-3 \leq w \leq 3$ f) $t < -2 \vee t > 2$

II-27 a) $V$ b) $V$ c) $F$ d) $V$

# 3. FUNCIONES

III-01 En cada caso marca el punto en el plano $xy$, e indica en qué cuadrante o sobre qué eje de coordenadas está cada punto.

a) $A(-3,2)$
b) $B(6,0)$
c) $C(-2,-2)$
d) $D(4,3)$
e) $E(0,-3)$
f ) $F(6,-3)$
g) $G(0,1)$
h) $H(-3,0)$

III-02 a) Marca todos los puntos en un plano $xy$: $(2,0)$, $(2,-3)$, $(2,1)$, $(2,4)$, $(2,-1)$.

b) Describe el conjunto de todos los puntos de la forma $(2,y)$ siendo $y$ un número real.

c) Describe el conjunto de todos los puntos de la forma $(x,3)$ siendo $x$ un número real.

III-03 Dadas las funciones:

a) $f(x) = -3x^2 + 2x - 4$

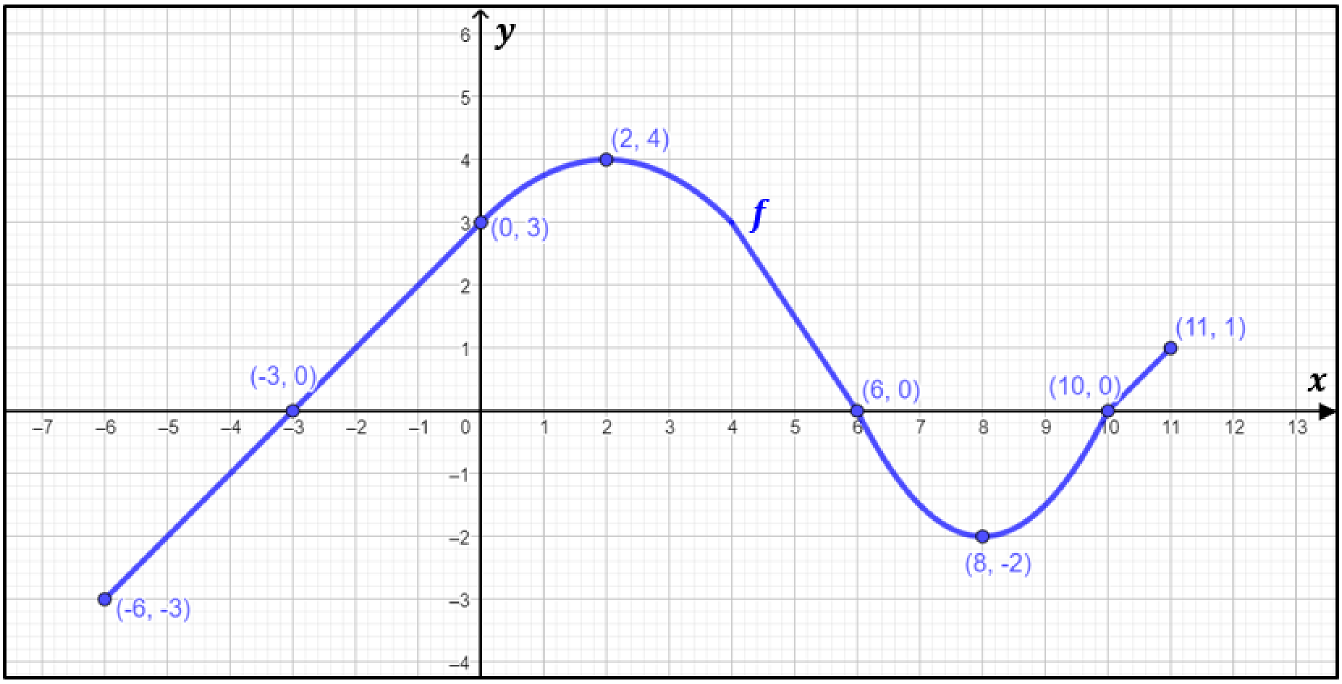
b) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+4}$

d) $f(x) = \frac{2x+1}{3x-5}$

Determina, para cada una de ella, los valores de: $f(0)$; $f(1)$; $f(-1)$; $f(3)$

III-04 Dada la gráfica de la función $y = f(x)$.




Trabajemos juntos en esta situación.

a) Determina $f(0)$ y $f(-6)$

¿Qué significa para vos la expresión $f(0)$? ¿Cuál es la variable que toma el valor $0$ en esta expresión?

Si tuvieras la expresión analítica de la función, ¿Qué procedimiento tendrías que realizar para determinar $f(0)$ o $f(-6)$?

En este caso tienes la representación gráfica de la función, que te brinda la información del comportamiento de la misma.

Ahora bien, cuando $x = 0$, de acuerdo al gráfico, ¿qué valor toma la imagen de la función? (es decir, dónde corta la función al eje $y$)

¿Lograste determinar ese valor? ¡¡¡Te felicito!!!

Los restantes, hazlo tu sólo.

b) ¿Es $f(2)$ positivo o negativo?

c) Determina $f(11)$ y $f(6)$.

d) ¿Es $f(8)$ positivo o negativo?

e) ¿Para qué números $x$ se cumple que $f(x) = 0$?

f) Completa, considerando que $k$ es un número real: "Toda expresión de la forma $f(0) = k$, se representa como un punto que pertenece al eje de ……………………..".

g) Completa, considerando que $k$ es un número real: "Toda expresión de la forma $f(k) = 0$, se representa como un punto que pertenece al eje de ……………………."

h) ¿Para qué números $x$ se cumple que $f(x) > 0$?

¿Qué significa $f(x) > 0$? **Que los valores que toma la función son positivos.**

Te recomendamos que observes el gráfico y que digas ¿para qué valores se cumple $f(x) > 0$?

¿Podrías expresar mediante intervalos esa condición? …………………..

Recuerda que, en forma intuitiva, podemos pensar que:

| |
|---|
| El dominio de una función puede ser visto como la sombra proyectada por la gráfica sobre el eje $x$ por rayos de luz verticales. La imagen (rango o codomino) puede ser considerada como la sombra proyectada por la gráfica sobre el eje $y$ por rayos de luz horizontales. |

i) ¿Cuál es el dominio de $f$?

j) ¿Cuál es la imagen de $f$?

k) ¿Cuáles son las intersecciones con el eje $x$?

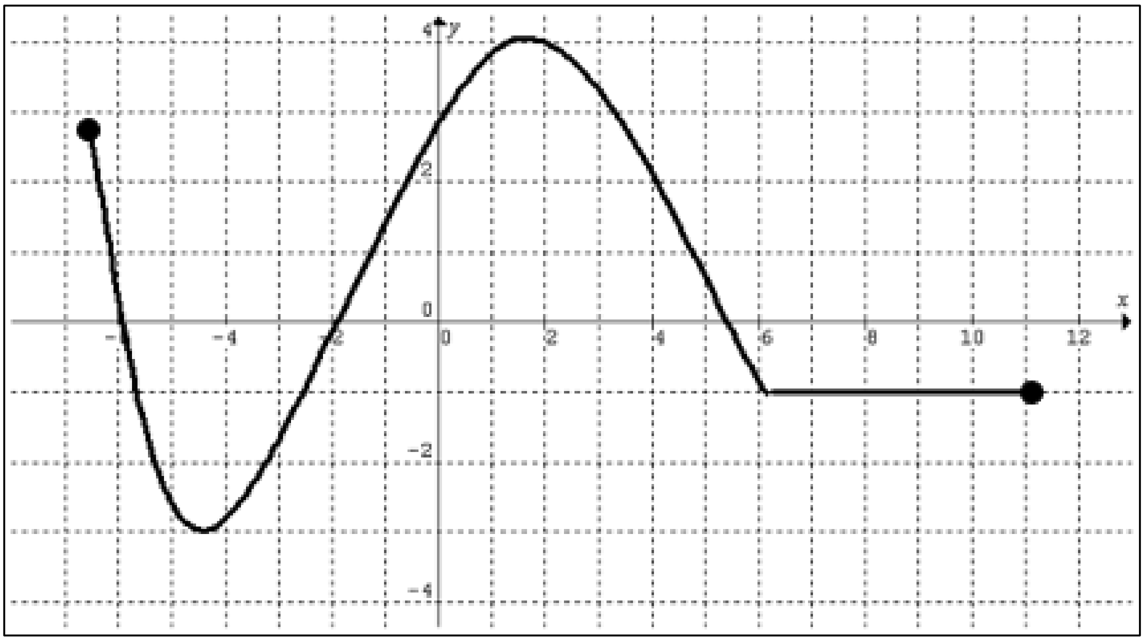
l) ¿Cuáles son las intersecciones con el eje $y$?

m) ¿Cuántas veces la recta $y = \frac{1}{2}$ corta a la gráfica?

n) ¿Cuántas veces la recta $y = 3$ corta a la gráfica?

o) ¿En qué conjunto $f$ es creciente?

III-05 Dada la función, cuya representación gráfica se muestra a continuación,



a) Determina $f(2)$ y $f(6)$……………………………

b) ¿Es $f(8)$ positivo o negativo?...............................

c) Determina el o los valores de $x$ tal que $f(x) = 2$ ……………………..

d) Determina el valor de $x$ tal que $f(x) = -3$ ………………………

e) ¿Cuál es el dominio de $f$?.......................................

f) ¿Para qué números $x$ se cumple que $f(x) = 0$? …………………………; ¿De qué otra manera se llama a estos puntos? …………………………

g) Determina el/los intervalo/s de negatividad de la función ……………………..

h) ¿Cuál es el recorrido de $f$?......................................

i) Determina el/los intervalo/s de positividad de la función ……………………..

j) ¿Cuántas veces la recta $y = 7/2$ corta a la gráfica? ………………………

k) ¿Cuántas veces la recta $y = 1$ corta a la gráfica? ………………………

l) ¿Cuáles son las intersecciones con el eje $y$? ………………… ¿de qué manera se llama la ordenada de este punto? ………………….. ¿una función, puede tener más de un punto con esta condición? ………………………

III-06 Responde las preguntas relativas a cada una de las siguientes funciones.

1) $f(x) = \frac{x+2}{x-6}$

a) ¿Está el punto $(3; 14)$ en la gráfica de la función?

b) Si $x = 4$ ¿cuánto vale $f(x)$?

c) Si $f(x) = 2$ ¿cuánto vale $x$?

d) ¿Cuál es el dominio de $f$?

2) $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$

a) Si $x = 4$ ¿cuánto vale $f(x)$?

b) Si $f(x) = -\frac{8}{3}$ ¿cuánto vale $x$?

c) ¿Cuál es el dominio de $f$?

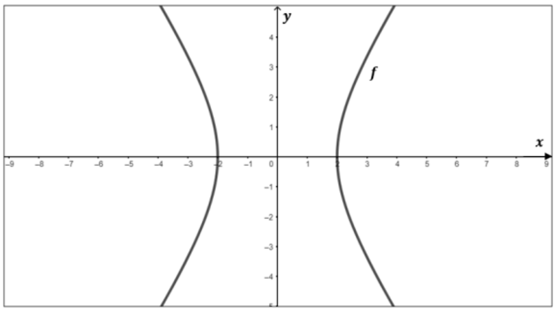
d) ¿Está el punto $(-3; \frac{3}{2})$ en la gráfica de la función?

III-07 A partir de las representaciones dadas,

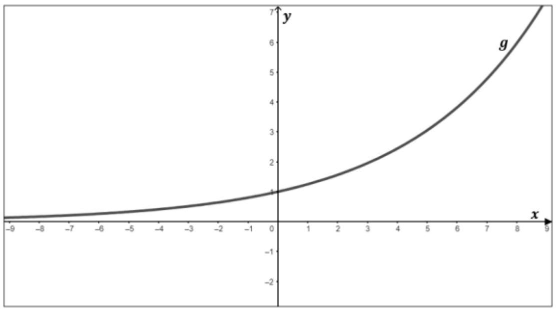
a) Determina en cada caso, si corresponde a una función o no. Justifica.

b) Para las que sean funciones, encuentra su dominio, su recorrido y las intersecciones con los ejes.

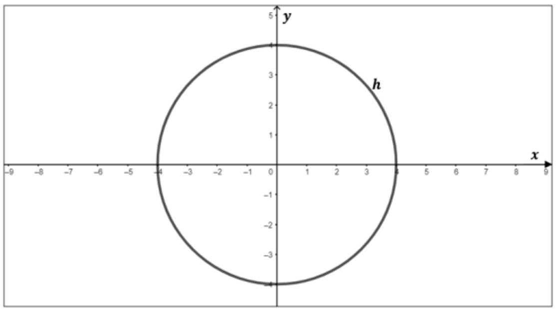
a)



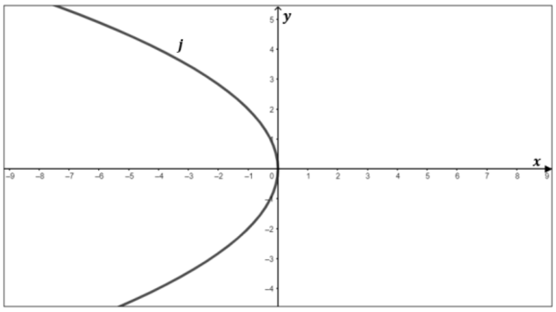

b)



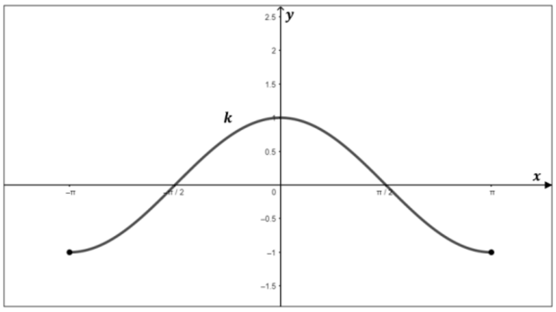

c)



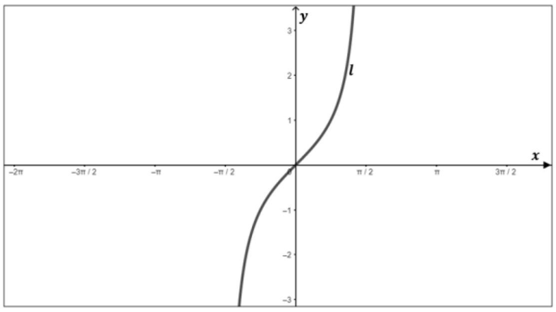

d)




e)




f)




III-08 En la práctica, cuando no tenemos el gráfico de la función y necesitamos conocer el dominio, no estamos obligados a realizar la representación. Trabajando algebraicamente lo podemos encontrar ¿De qué manera?

Determina el dominio de cada función.

a) $f(x) = 3x + 4$

b) $g(x) = \frac{x}{x-1}$

c) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$

d) $j(x) = \frac{x}{x^2+1}$

e) $k(x) = \frac{x}{x^2-1}$

f) $l(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

Analicemos el caso c) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ y tratemos de encontrar un dominio adecuado.

En primer lugar, vemos que la función presenta un cociente y una raíz cuadrada en el denominador, ¿cómo condiciona esta raíz cuadrada y el cociente a los valores que puede tomar la variable $x$?

Si analizamos el radicando del denominador, debe ocurrir que:

$x^2 - 4 > 0$ despejando $x$ obtenemos:

$$x > \sqrt{4}; \text{ o bien, } x < -\sqrt{4}$$

Por lo que el dominio resulta ser $\boxed{(-\infty, -2) \cup (2, \infty)}$

Te proponemos que, a través de tus conocimientos algebraicos y gráficos, justifiques y verifiques el resultado obtenido.

III-09 Indica cuáles de las siguientes ecuaciones es una función. Justifica.

a) $y = x^2 + 2x$

b) $y = \frac{2}{x}$

c) $y = \frac{3}{x} - 3$

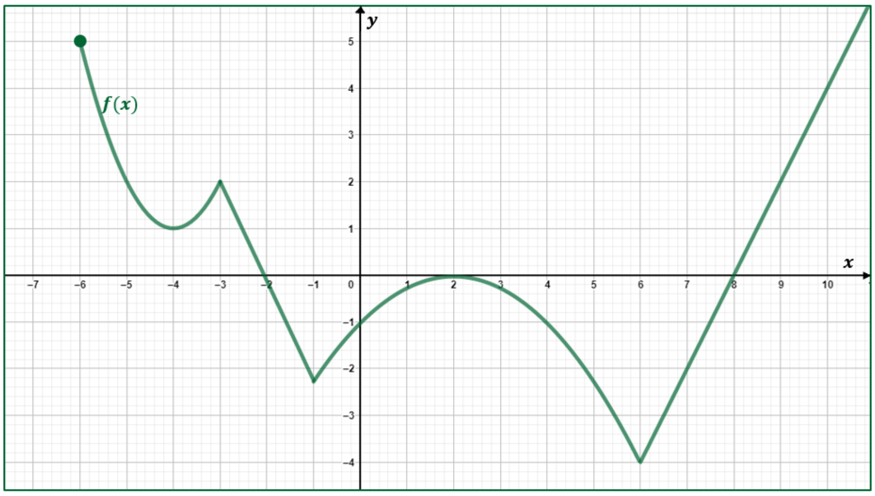
d) $y^2 = 1 - x^2$

e) $y + x^2 = 1$

f) $y = \pm\sqrt{1 - 2x}$

III-10 ¿Son iguales las funciones $f(x) = x - 1$ y $g(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$? Explique su respuesta.

III-11 Dada la representación gráfica de la función $\boldsymbol{f(x)}$, completa.




*a.* Dominio de $\boldsymbol{f(x)}$: ..................................................

*b.* Imagen de $\boldsymbol{f(x)}$: ..................................................

*c.* Ceros de $\boldsymbol{f(x)}$: ..................................................

*d.* Ordenada al origen de $\boldsymbol{f(x)}$: ..................................................

*e.* Conjunto de negatividad de $\boldsymbol{f(x)}$: ..................................................

*f.* Intervalos de decrecimiento de $\boldsymbol{f(x)}$: ..................................................

*g.* $\boldsymbol{f(-4)} =$ ..................................................

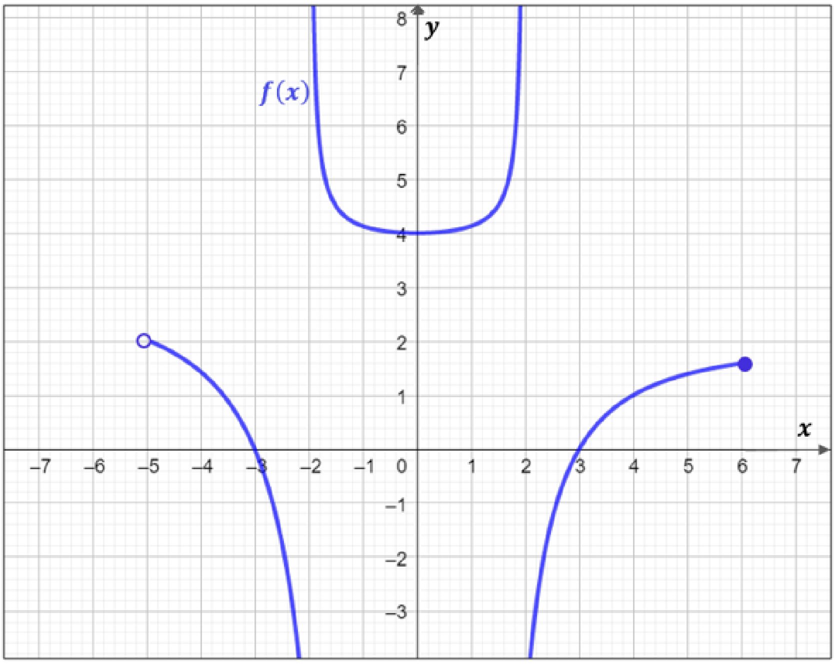
*h.* Si $\boldsymbol{f(x) = 2}$; entonces $\boldsymbol{x} =$..................................................

*i.* La recta de ecuación $\boldsymbol{y = -1}$ corta a la gráfica ............. vez/veces.

*j.* La recta de ecuación $\boldsymbol{x = 2}$ corta a la gráfica ............. vez/veces.

*k.* ¿Cuál es el punto de intersección de la gráfica de $f(x)$ con el eje y? ..........................

III-12 Dada la representación gráfica de la función $\boldsymbol{y = f(x)}$, completa.




a) La ordenada al origen de $f(x)$es: ............................................

b) Dominio de $f(x)$: ..............................................

c) Imagen de $f(x)$: ..............................................

d) Ceros de $f(x)$: ..............................................

e) $f(4) =$..............................................

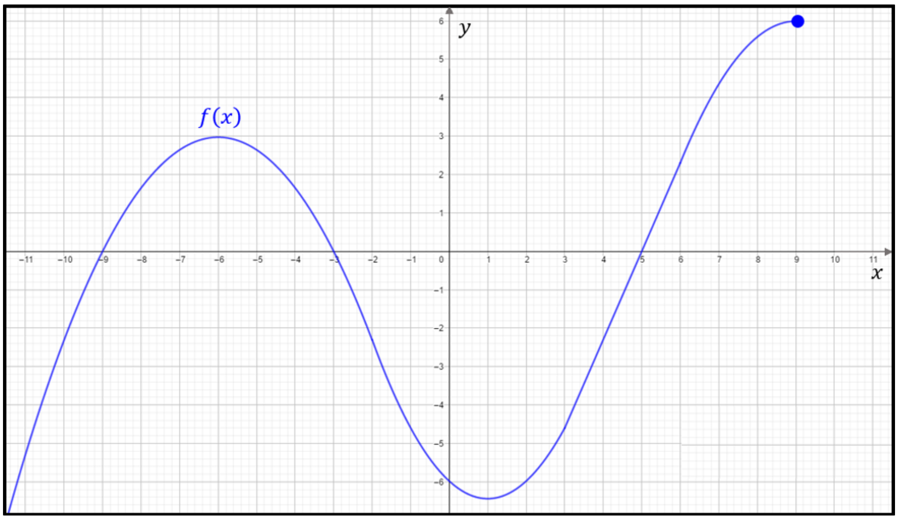
f) Intervalo/s de decrecimiento de $f(x)$: ..............................................

g) Intervalo/s de positividad de $f(x)$: ..............................................

h) ¿La gráfica de la función de $f(x)$ interseca a la recta $x = 2$? ..........................

i) ¿Es $f(-4)$ positivo o negativo? ..............................................

III-13 Dada la representación gráfica de la función $\boldsymbol{y = f(x)}$, completa.



a) Dominio de $f(x)$: ……………………………………………………………………

b) Imagen de $f(x)$: ………………………………………………………………………

c) Raíces de $f(x)$: ……………………………………………………………………

d) Intervalos de crecimiento de $f(x)$: ………………………………………………

e) Intervalos de positividad de $f(x)$: ………………………………………………

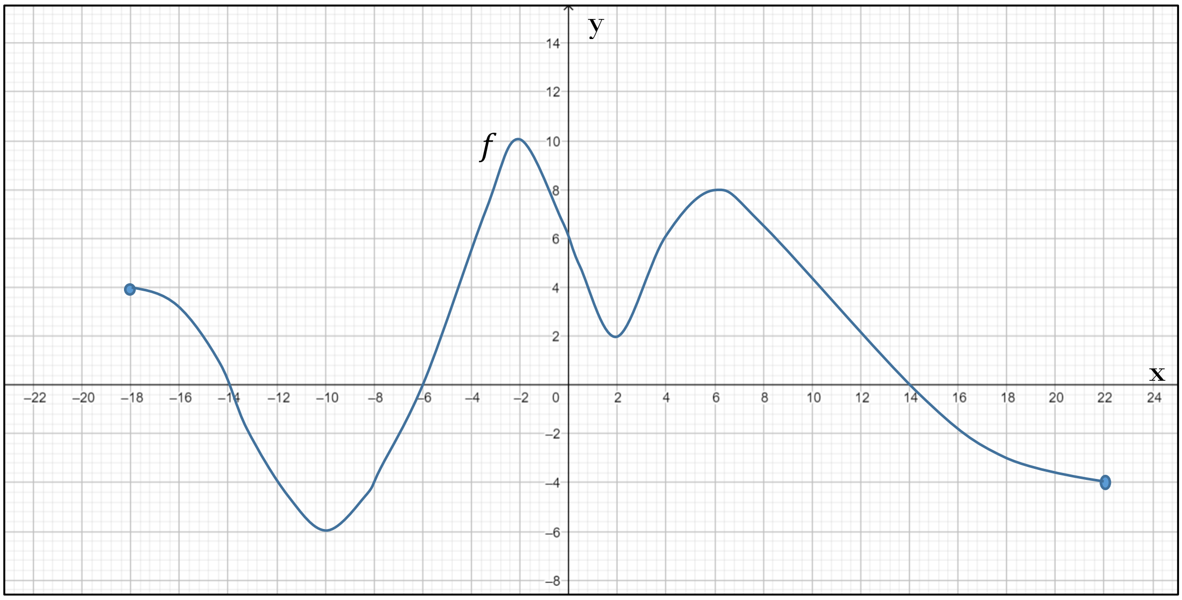
f) Punto de intersección de $f(x)$ con el eje de ordenadas: ………………………

g) Si $f(x) = 6$ entonces $x =$ ……………………………………………………………

h) ¿Cuántas veces la recta $y = \frac{3}{2}$ corta a la gráfica de $f(x)$? …………………………

i) $f(2) =$ …………………………………………………………………………………

III-14 Dada la representación gráfica de la función $\boldsymbol{y = f(x)}$, completa.




a) $f(0) =$ ……………………………………………

b) Dominio de $f(x)$: ……………………………………………

c) Imagen de $f(x)$: ……………………………………………

d) Raíces de $f(x)$: ……………………………………………

e) Ordenada al origen de $f(x)$: ……………………………………………

f) Intervalo/s de crecimiento de $f(x)$: ……………………………………………

g) Intervalo/s de negatividad de $f(x)$: ……………………………………………

h) Si $f(x) = -4$ entonces $x =$ ……………………………………………

i) ¿Cuántas veces la recta $y = 6$ corta a la gráfica de $f(x)$? ……………………………………………

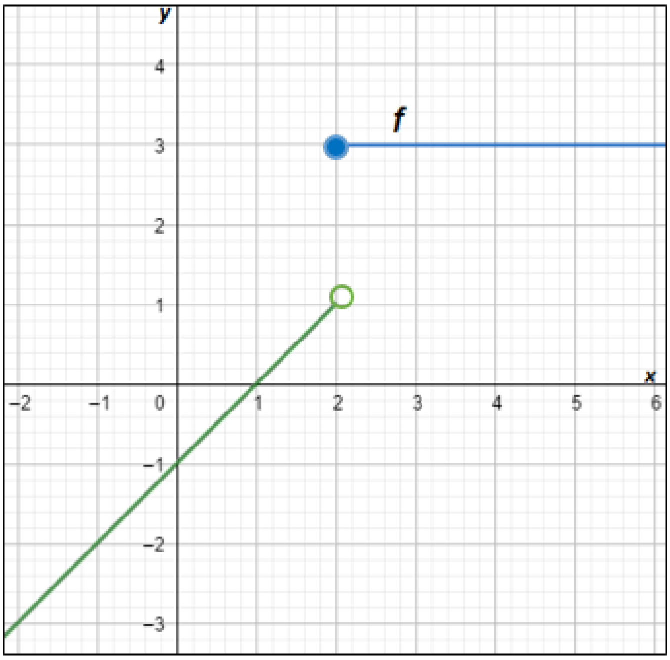
j) ¿Es $f(-2)$ positivo o negativo? ……………………………………………

## Funciones definidas por tramos

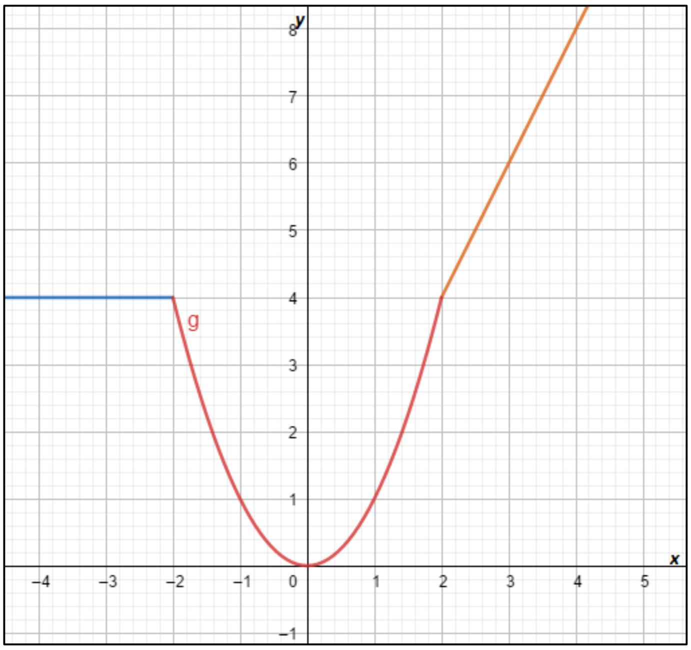
Otros tipos de funciones son las definidas por tramos, que muchas veces resultan muy útiles en la modelización de diversos fenómenos. Una función definida por tramos, es una función que se define mediante una regla que consta de dos o más ecuaciones. La elección de la ecuación a utilizar depende del valor de la variable independiente x.

Ejemplos:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f/(x) = \begin{cases} x-1 & si, x < 2 \\ 3 & si, x \geq 2 \end{cases}$$




$$g: R \to R / g/(x) = \begin{cases} 4 & si\ x < -2 \\ x^2 & si\ -2 \leq x \leq 2 \\ 2x & si\ x > 2 \end{cases}$$



III-15 Dadas las siguientes funciones definidas por tramo:

1) $Sea\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si\ x < 0 \\ 2 & si\ x = 0 \\ 2x + 1 & si\ x > 0 \end{cases}$

a) Determina: $f(-3); f(0); f(2)$

b) Grafica.

2) $Sea\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / g(x) = \begin{cases} 2x + 5 & si\ x \leq -1 \\ 3 & si\ x > -1 \end{cases}$

a) Grafica y encuentra la imagen de $g$.

b) Determina: $g(3); g(0); g(-2); g(x) = 0$

3) $Sea\ h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / h(x) = \begin{cases} -2x + 3 & si\ x \leq 0 \\ 1 & si\ 0 < x < 2 \\ x - 1 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

a) Grafica y encuentra la imagen de $h$.

b) Determina: $h(-3); h(0); h(2); h(x) = 0$

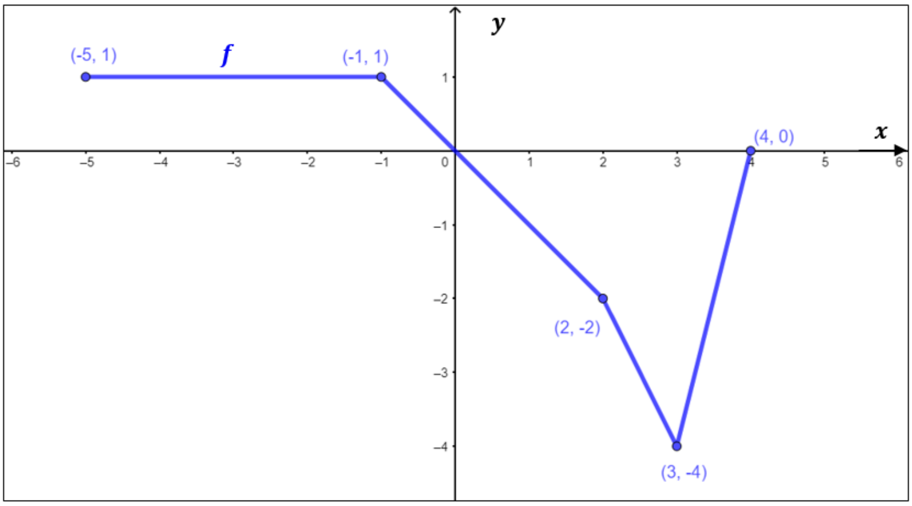
III-16 Para las siguientes funciones,

a) Realiza la gráfica de cada una.
b) Determina el dominio de cada una de ellas.
c) Con base en la gráfica, determina el recorrido.
d) Escribe el punto de intersección de la función con el eje de ordenadas.
e) Escribe el o los puntos de intersección de la función con el eje de abscisas.

1. $f(x) = 3x - 3$
2. $g(x) = 4 - 2x$
3. $h(x) = x^2 - 4$
4. $j(x) = x^2 + 4$
5. $k(x) = -x^2$
6. $l(x) = 2x^2$
7. $m(x) = \sqrt{x - 2}$
8. $n(x) = \sqrt{x} + 2$
9. $o(x) = \sqrt{2 - x}$
10. $p(x) = -\sqrt{x}$
11. $q(x) = |x| + 3$
12. $r(x) = |x + 3|$

III-17 Utilice la siguiente gráfica de la función $f$ para determinar:

a) El dominio y recorrido de $f$.
b) Los intervalos donde $f$ es creciente.
c) Los intervalos donde $f$ es constante
d) La intersección de la gráfica con los ejes.




III-18 Si $f(x)$ es una función definida en $\mathbb{R}$ y tal que a cada elemento del dominio le corresponde un valor constante $k$ ¿Cuál es la imagen de la función?

III-19 En la función identidad, la imagen de cualquier elemento del dominio es el mismo elemento.

a) ¿Cómo simbolizaría la función identidad?

b) ¿Cuál es la imagen de $x = 4$?

c) Represente.

III-20 Si la fórmula que representa una función lineal es $y = mx + b$, donde $x$ e $y$ son las variables independientes y dependiente respectivamente, $m$ es una constante llamada pendiente y $b$ otra constante que se denomina ordenada al origen. Determine para cada una de las siguientes funciones el valor de $m$ y el de $b$.

a) $y = 5x$ b) $y = x$ c) $y = -3x + \frac{1}{2}$

d) $y = 2x + 4$ e) $y = -x - 3$ f) $4x + 2y - 8 = 0$

III-21 Indica verdadero o falso según corresponda.

| | | |
|---|---|---|
| a) Las rectas verticales cortan a la gráfica de una función en no más de un punto. | V | F |
| b) Si $x$ es un elemento del dominio de una función, entonces existe una imagen del mismo en el codominio de dicha función. | V | F |
| c) Si $f$ es una función definida mediante la ecuación $y = f(x)$, entonces $x$ es la variable independiente e $y$ es la variable dependiente. | V | F |
| d) $f(x) = b$ es la ecuación de la función constante y representa una recta paralela al eje $x$ que pasa por $y = b$. | V | F |
| e) La expresión $f(x) = mx + b$, representa una recta que corta al eje de abscisas en $x = b$. | V | F |
| f) Toda función lineal, tiene por dominio al conjunto de los números reales. | V | F |

III-22 Realiza las gráficas de $f(x) = x^2$; $g(x) = x^2 + 2$, $h(x) = x^2 + 4$ y $j(x) = x^2 - 2$; y responde:

a. ¿Qué patrón observas?

b. ¿Puedes predecir la gráfica de $k(x) = x^2 - 4$? ¿Y la de $l(x) = x^2 + 5$?

III-23 Realiza las gráficas de $f(x) = x^2$; $g(x) = (x-2)^2$; $h(x) = (x-4)^2$ y $j(x) = (x+2)^2$; y responde:

a. ¿Qué patrón observas?

c. ¿Puedes predecir la gráfica de $k(x) = (x+4)^2$? ¿Y la de $l(x) = (x-5)^2$?

III-24 Para cada una de las siguientes funciones,

a) Determina si la gráfica abre sus ramas hacia arriba o hacia abajo.

b) Encuentra en cada caso, el vértice, raíces, ordenada al origen, y el eje de simetría.

c) Representa gráficamente sin usar tabla de valores.

d) Determina dominio, imagen, intervalos de crecimiento y decrecimiento, intervalos de positividad y negatividad.

1. $f(x) = 2x^2$ 2. $g(x) = 2x^2 - 3$ 3. $h(x) = 2x^2 + 4$

4. $j(x) = 2x^2 - 4x + 2$ 5. $k(x) = -2x^2$ 6. $f(x) = -2x^2 + 4$

III-25 Halla las intersecciones con los ejes, los vértices y gráfica las siguientes funciones:

a) $y = x^2 - 6.x + 9$

b) $x^2 - 4.x - 2.y + 4 = 0$

c) $y = -x^2 + x + 6$

d) $y = x^2 + x/2 - ½$

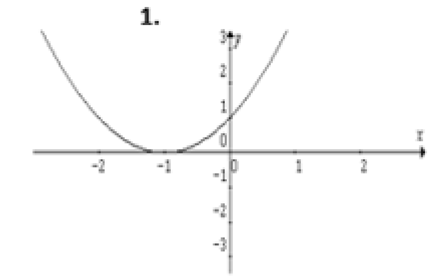
e) $y = x^2 - 5.x/2 + 1$

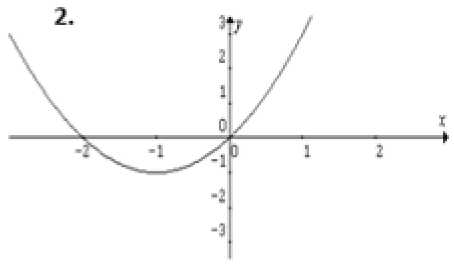
f) $x^2 + 8.y = 0$

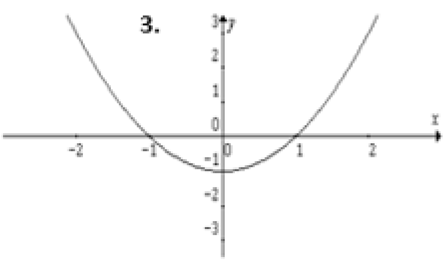
III-26 En los ítems del 1 al 8 asocie cada gráfica con una de las siguientes funciones

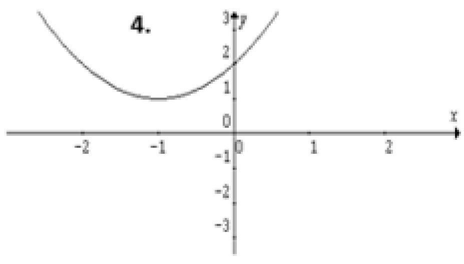
a) $y = x^2 - 1$ c) $y = x^2 - 2x + 1$ e) $y = x^2 - 2x + 2$ g) $y = x^2 - 2x$

b) $y = -x^2 - 1$ d) $y = x^2 + 2x + 1$ f) $y = x^2 + 2x$ h) $y = x^2 + 2x + 2$

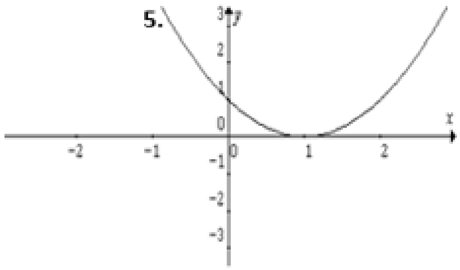


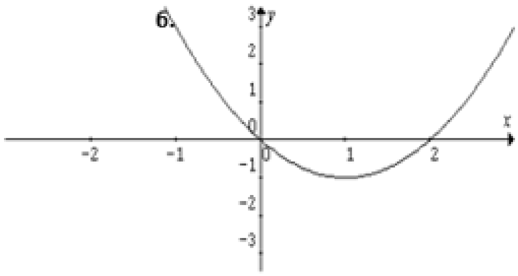



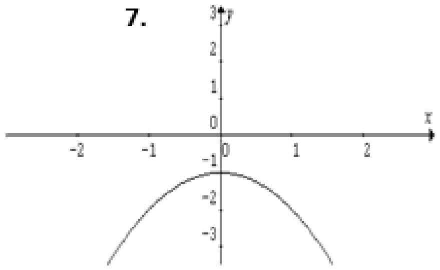
5.



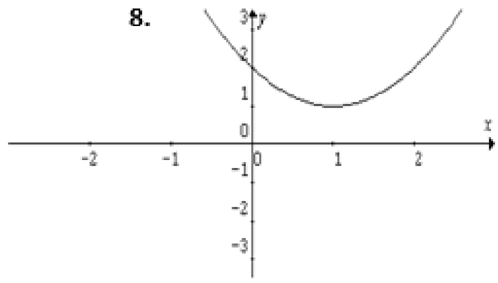
6.



7.



8.



Con frecuencia los problemas del mundo real nos conducen a modelos matemáticos que utilizan funciones, que hay que construir teniendo en cuenta la información de la que se dispone. Para construir funciones se debe poder expresar el enunciado (descripción verbal) del problema al lenguaje de la matemática. Esto lo hacemos asignando símbolos para representar a la variable dependiente y la independiente y determinando después la función o regla que relaciona dichas variables.

III-27 Un agricultor dispone de 400 m de cerca y desea rodear un área rectangular con ella.

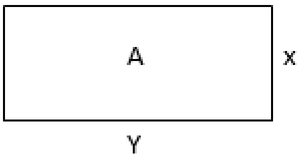
a) Expresa al área *A* del rectángulo como una función de su anchura.

b) ¿Cuál es el dominio de *A*?

c) Realiza la gráfica de $A = A(x)$. ¿Para cuáles valores de x es mayor el área?

Analizando el enunciado, observamos que el dato 400m expresa el perímetro de un rectángulo.

Representemos el rectángulo y asignemos símbolos a las variables, $y$ (largo) y $x$ (ancho), de tal manera que: Luego, a partir del perímetro: $400 = 2x + 2y$. De donde $y = 200 - x$




¿Qué es lo que se solicita en primera instancia?

¿Qué nombre le hemos puesto a la anchura?

¿Cuál es la fórmula del área de un rectángulo?

Luego, se pregunta sobre el dominio de la función hallada, te preguntamos:

¿Qué restricciones posee? ¿Puede $x$ tomar valores negativos, siendo ella una longitud? ¿Cómo hallarías el dominio de la función área?

Una forma puede ser:

$200x - x^2 > 0$, luego:

$x(200 - x) > 0$, por lo que:

$x > 0; x < 200$

Observa que $x < 0$ y $x < 200$ no puede ser solución ya que son longitudes.

Por lo tanto, el dominio sería $(0, 200)$.

Te solicitamos que representes ahora lo que se pide en el inciso c) y observando el gráfico respondas la pregunta planteada.

III-28 El volumen $V$ de un cilindro circular recto de altura $h$ y radio $r$ es $V = \pi r^2 h.$ Si la altura mide el doble del radio, exprese el volumen $V$ en función de $\boldsymbol{r}$.

III-29 Al poner a prueba un nuevo automóvil se comprobó que para velocidades mayores que 10 km/h y menores que $150\ km/h$, el rendimiento de nafta $r$ (en km/litro) está relacionado con la velocidad $v$ (en km/hora) mediante la función: $r(v) = 0{,}002v(180 - v)$.

a. Completa la tabla:

| v(km / h ) | 40 | | 110 |
|---|---|---|---|
| r (km / l ) | | 6,4 | |

b. Calcula a qué velocidad el rendimiento es máximo y encuentra dicho rendimiento.

III-30 La temperatura $T$, en grados Celsius, a la cual hierve el agua, se relaciona con la altitud $h$, en metros sobre el nivel del mar, mediante la fórmula:

$$h = 1000(100 - T) + 580(100 - T)^2 \qquad \textit{válida para } 95 \leq T \leq 100$$

La elevación aproximada del Monte Everest es de 8 840 m, ¿Cuál será la temperatura a la cual hierve el agua en la cima de esa montaña?

III-31 El beneficio $P$ (en miles de dólares) de una empresa está dada por:

$$P(x) = 5000 + 1000x - 5x^2$$

donde $x$ es la cantidad (en miles de dólares) que la empresa gasta en publicidad.

a) Encuentra la cantidad $x$ que la empresa tiene que pasar para maximizar su beneficio.

b) Encuentra el máximo beneficio.

c) Grafica la situación.

III-32 Se estudiaron los efectos nutricionales sobre ratas que fueron alimentadas con una dieta que contenía un 10% de proteína. La proteína consistía en levadura y harina de maíz. Variando el porcentaje $P$ de levadura en la mezcla de proteína, se estimó que el peso promedio ganado (en gramos) de una rata en un período fue de $f(P)$, donde:

$$f(P) = -\frac{1}{50}P^2 + 2P + 20$$

Encuentra el máximo peso promedio ganado. Realiza la gráfica de la situación.

III-33 Considera que el fabricante de una secadora de ropa ha encontrado que cuando el precio por unidad es $p$ dólares, el ingreso $R$ (en dólares) es: $R = -4p^2 + 4000p$ ¿Qué precio unitario debe establecerse para maximizar el ingreso? ¿Cuál es el ingreso máximo? Realiza una gráfica que describa la situación.

III-34 Una compañía de tractores ha encontrado que el ingreso por sus ventas de tractores para trabajo pesado es una función del precio por unidad $p$. Si el ingreso $R$ es:

$$R = -\frac{1}{2}p^2 + 1900p$$

¿Cuál es el precio unitario $p$ que debe cobrarse para maximizar el ingreso? ¿Cuál es el ingreso máximo? Realiza una gráfica que describa la situación.

III-35 Un constructor debe hacer una ventana rectangular. Para el marco dispone de 13,20 metros de varilla metálica. Halla las dimensiones de modo que el área de abertura sea máxima.

III-36 Se arroja verticalmente hacia arriba una pelotita de tenis imprimiéndole una velocidad de $10\ m/s$. Su altura en metros sobre el suelo, t segundos de haber sido lanzada, está dada por la función:

$$h(t) = 1{,}05 + 10t - 5t^2$$

a) ¿Desde qué altura es lanzada la pelotita?

b) ¿En qué instante alcanza la altura máxima?

c) ¿Cuál es la altura máxima a la que llega la pelotita?

d) ¿Cuánto se demora la pelotita de tenis en llegar al suelo?

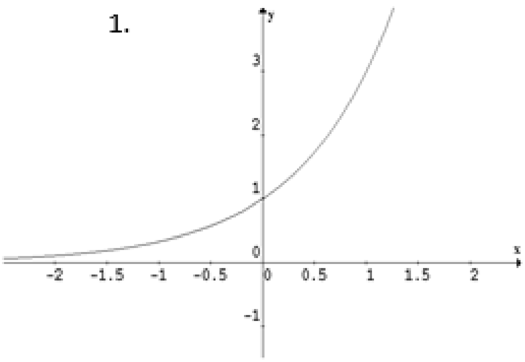
III-37 Utiliza la calculadora para resolver y redondea en cada caso tu respuesta a tres decimales.

| | |
|---|---|
| a) $3^{2,2} =$ | e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2,2} =$ |
| b) $3^{2,3} =$ | f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2,3} =$ |
| c) $3^{2,4} =$ | g) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2,4} =$ |
| d) $3^{2,5} =$ | h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2,5} =$ |

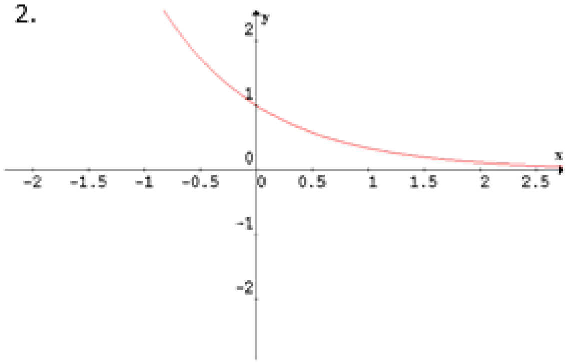
III-38 Las siguientes gráficas corresponden a funciones exponenciales y desplazamientos de funciones exponenciales. Relaciona cada gráfica con una de las siguientes funciones.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $y = 3^x$ | b) $y = 3^{-x}$ | c) $y = -3^x$ | d) $y = -3^{-x}$ |
| e) $y = 3^x - 1$ | f) $y = 3^{x-1}$ | g) $y = 3^{1-x}$ | h) $y = 1 - 3^x$ |

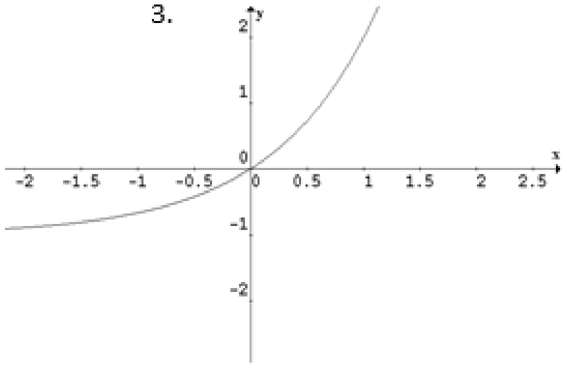
1.



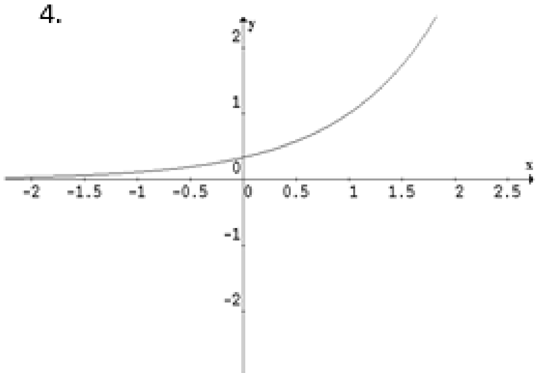

2.



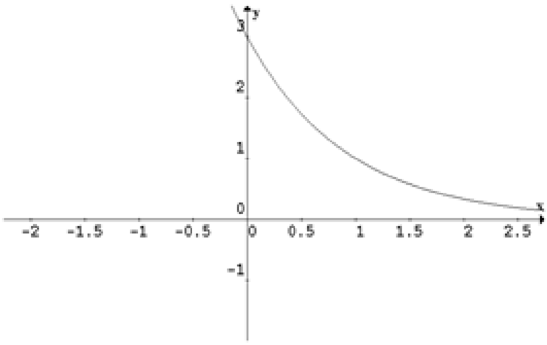
3.



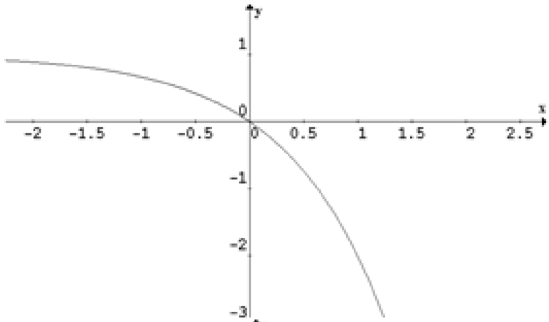

4.



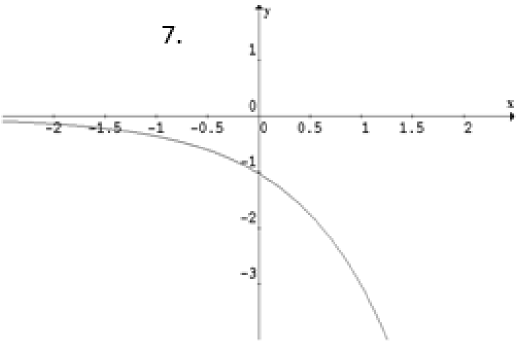

5.



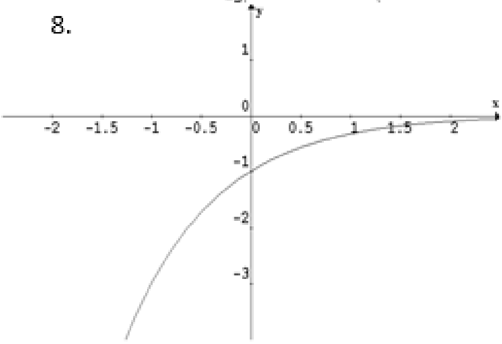

6.




7.




8.




III-39 Una centena de ciervos, cada uno de 1 año de edad, se introducen en un coto de caza. El número $N(t)$ de los que aún queden vivos después de $t$ años se predice que es $N(t) = 100 \cdot 0{,}9^t$.

Estima el número de animales vivos después de:

a) 1 año.

b) 5 años.

c) 10 años.

III-40 La presión atmosférica $P$ sobre un globo o un avión disminuye al aumentar la altura. Esta presión, medida en milímetros de mercurio, se relaciona con el número de kilómetros $h$ sobre el nivel del mar mediante la fórmula: $P = 760e^{-0{,}145h}$.

a) Determina la presión atmosférica a una altura de 2 kilómetros.

b) ¿Cuál es la presión a una altura de 10 kilómetros?

III-41 El número de vatios $w$ proporcionados por la fuente de energía de un satélite espacial después de un período de $d$ días está dado por la fórmula: $w = 50e^{-0{,}004d}$.

a) ¿Cuánta energía estará disponible después de 30 días?

b) ¿Cuánta energía estará disponible después de un año (365 días)?

III-42 La recuperación normal de una herida se puede modelar mediante una función exponencial. Si $A_0$ representa el área original de la herida y $A$ es el área después de $n$ días, entonces la fórmula dada por $A = A_0 e^{-0,35n}$, describe el área de una herida en el *n*-ésimo día después de una lesión, si no hay infecciones que retarden la recuperación. Considera que una herida tiene un área inicial de 1 cm$^2$.

a) ¿Cuánto medirá el área de la herida después de 3 días?

b) ¿Cuánto medirá después de 10 días?

III-43 Un problema importante de oceanografía consiste en determinar la cantidad de luz que puede penetrar a varias profundidades oceánicas. La Ley de Beer Lambert establece que se debe utilizar una función exponencial para modelar este fenómeno. Suponiendo que $l(x) = 10(0{,}4)^x$ es la energía lumínica equivalente (en cal s/cm2 ) que llega a una profundidad de $x$ metros.

a) ¿Qué energía se tiene a una profundidad de 2 m?

b) Traza la gráfica de $l$, desde $x = 0$ a $x = 5$.

III-44 El porcentaje $R$ de audiencia que responde a un comercial de televisión para un nuevo producto después de $t$ días se determina mediante la fórmula $R = 70 - 100e^{-0,2t}$. Esta función es válida para $t > 1{,}8$.

a) ¿Qué porcentaje se espera que responda después de 10 días?

b) ¿Cuántos días habrán transcurrido en responder la audiencia si el porcentaje fue de 30%?

c) ¿Cuál es el porcentaje máximo de personas que se espera respondan?

d) Realiza la gráfica de $R$ (con $t > 0$) ¿Cuántos días deben transcurrir para que $R$ exceda el 40 por ciento?

III-45 La ganancia anual $P$ de una compañía debida a las ventas de cierto artículo después de $x$ años de ser lanzado al mercado es:

$$P = 100\,000 - 60\,000\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

a) ¿Cuál es la ganancia después de 5 años?
b) ¿Y después de 10?
c) ¿Cuál es la máxima ganancia que la compañía espera obtener de su producto?
d) Realiza la gráfica de la función de la ganancia. ¿Cuántos años deben transcurrir antes de que se obtenga una ganancia de $65.000?

III-46 Determina el dominio de cada función y representa gráficamente.

a) $f(x) = \ln(3 - x)$
b) $f(x) = \ln(x - 5)$
c) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

III-47 Si un solo cristal obstruye el 10% de la luz que pasa por él, entonces el porcentaje de luz que pasa a través de *n* cristales consecutivos está dado aproximadamente por la ecuación:

$$P = 100e^{-0,1n}$$

a) ¿Qué porcentaje de la luz pasará a través de 10 cristales?
b) ¿Cuántos cristales son necesarios para bloquear al menos un 50% de la luz?
c) ¿Y para bloquear al menos el 75% de la luz?
d) ¿Qué cantidad de cristales se necesitan para que el porcentaje de luz que atraviesa sea del 45%?

III-48 Un lago pequeño contiene cierta especie de pez. Un grupo de investigadores, ha realizado un trabajo de campo, que le ha permitido modelar el crecimiento poblacional de esos peces en ese lago. La función propuesta es:

$$P(t) = \frac{12}{1 + 5e^{-0,7t}}$$

Donde $P$ es el número de peces medido en miles, $t$ el tiempo (desde que se aprovisionó el lago) medido en años.

a) Encuentre la población de peces que habrá después de dos años.
b) ¿Cuántos años deberán transcurrir para que el número de peces alcance los 10000?

III-49 Si se agregan 25 gramos de sal a una cierta cantidad de agua; la cantidad $q(t)$ de sal sin disolver después de $t$ segundos está dada por la siguiente función:

$$q(t) = 25e^{-0,12t}$$

a) ¿Cuántos gramos de sal quedarán sin disolver, a los seis segundos de agregada al agua?
b) ¿Cuántos segundos deberán transcurrir para que queden exactamente 2 gramos de sal sin disolver?

III-50 A una persona se le inyectan 250 mg de penicilina. La cantidad de penicilina (en mg) presente en el cuerpo al transcurrir el tiempo está dada por $\boldsymbol{f(t)} = \mathbf{250}\ \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\boldsymbol{t}}$, siendo $\boldsymbol{t}$ el tiempo en hora.

a) ¿Cuántos mg de penicilina posee el cuerpo en el momento de aplicarse la inyección?
b) De acuerdo a este modelo, ¿puede alcanzar el cuerpo un nivel de 0 mg de penicilina?
c) ¿Cuántos mg se encuentran en el cuerpo pasada 3 horas?
d) Si el cuerpo contiene 80 mg de penicilina, ¿cuánto tiempo pasó desde que se le aplicó la inyección?

III-51 El $pH$ de una solución química está dado, aproximadamente, por $pH = -log[H^+]$. En esta fórmula, $[H^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno en moles por litro. Los valores de $pH$ varían de 0 (ácido) a 14 (alcalino).

a) Determina el $pH$ del agua en un recipiente de 1 litro con 0,0000001 moles de iones hidrógeno.
b) Determine la concentración de iones hidrógeno en una solución semiácida con un $pH$ de 4,2.

III-52 El número de vatios $w$ proporcionados por la fuente de energía de un satélite espacial después de un período de $d$ días está dado por la fórmula: $w = 50e^{-0,004d}$.

a) ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que la energía disponible llega a 30 vatios?
b) ¿Y hasta que descienda a sólo 5 vatios?

III-53 La fórmula $D = 5e^{-0,4h}$ sirve para determinar el número de miligramos $D$ de cierto medicamento en el flujo sanguíneo de un paciente $h$ horas después de su administración. Cuando el número de miligramos llegue a 2 se debe administrar de nuevo el medicamento ¿Cuánto tiempo transcurre entre las inyecciones?

III-54 Un modelo para el número $N$ de personas en una comunidad escolar que ha escuchado cierto rumor es: $N = P\left(1 - e^{-0,15d}\right)$, donde $P$ es la población total de la comunidad y $d$ es el número de días transcurridos desde el inicio del rumor. Considerando una comunidad de 1000 estudiantes:

a) ¿Cuántos de ellos habrán escuchado el rumor después de 3 días?
b) ¿Cuántos días habrán transcurrido antes de que 450 estudiantes hayan escuchado el rumor?

III-55 En ocasiones los psicólogos utilizan la función $L(t) = A\left(1 - e^{-kt}\right)$ para medir la cantidad *L* aprendida en el tiempo $t$ .El número $A$ representa la cantidad por aprender y $k$ mide el nivel de aprendizaje. Suponga que un estudiante debe aprender un total de $A = 200$ palabras de vocabulario. Un psicólogo determina que el estudiante aprendió 20 palabras cada 5 minutos.

a) Determina la tasa de aprendizaje $k$ (redondea a dos decimales).
b) ¿Aproximadamente cuántas palabras habrá aprendido después de 10 minutos?
c) ¿Y después de 15 minutos?
d) ¿Cuánto tiempo tardará en aprender 180 palabras?

III-56 Es posible medir la concentración de alcohol en la sangre de una persona. Supongamos que el riesgo $R$ (dado como un porcentaje) de tener un accidente de automóvil se modela mediante la ecuación: $R = 3e^{-kx}$, donde $x$ es la concentración variable de alcohol en la sangre y $k$ una constante.

a) Considera que una concentración de 0,06 de alcohol en la sangre produce un riesgo de $10\%$ ($R = 10$) de sufrir un accidente. Determina la constante $k$ de la ecuación (redondea a dos decimales).
b) Utiliza ese valor de $k$ e indique cuál es el riesgo si la concentración es de $0{,}17$.
c) Utiliza ese valor de $k$ e indique la concentración de alcohol si el riesgo es del $100\%$.
d) Si la ley establece que las personas con riesgo de sufrir un accidente de $15\%$ o mayor no deben manejar ¿Con cuál concentración del alcohol debe un conductor ser arrestado y multado?

III-57 La potencia *P* de salida de un amplificador (en vatios) se relaciona con la ganancia de voltaje (en decibeles) *d* mediante la fórmula $P = 25e^{0{,}1d}$.

a) Determina la potencia de salida para una ganancia de voltaje de 4 decibeles.
b) Para una potencia de salida de 50 vatios, ¿cuál es la ganancia de voltaje?

III-58 El tamaño *P* de cierta población de insectos en el instante *t* (en horas) obedece a la siguiente ecuación:

$$P = 1000e^{0{,}01t}$$

a) ¿Después de cuántas horas llegará ese número a 1500?
b) ¿Y a 2000?

III-59 Determina el dominio de $f(x) = log_a x^2$ y el dominio de $g(x) = 2log_a x$. Sabiendo que, por propiedad de logaritmos es $log_a x^2 = 2\, log_a x$ ¿Cómo explicas el hecho de que los dominios no sean iguales?

III-60 En los siguientes ítems, completa en la línea punteada con lo que corresponda.

a) La gráfica de toda función exponencial $f(x) = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$, pasa por los puntos $(0, \dots)$ y $(\dots.., a)$.

b) Si $3^x = 3^4$, entonces $x = \cdots\cdots\cdots$

c) Si la gráfica de una función exponencial $f(x) = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$ es decreciente, entonces su base debe ser menor que ............

d) El logaritmo de un producto es igual a .............................. de los logaritmos de los factores.

e) Para cualquier base, el logaritmo de ............ es igual a 0.

f) Si $log_8 M = \frac{log_5 7}{log_5 8}$, entonces $M = \dots\dots\dots$

g) El dominio de la función logarítmica $f(x) = log_a x$ (con $a > 0$ y $a \neq 1$) es .....................

h) Si la gráfica de toda función logarítmica $f(x) = log_a x$, siendo $a > 0$ y $a \neq 1$, es creciente, entonces su base debe ser mayor que .............

i) La gráfica de toda función logarítmica $f(x) = log_a x$, siendo $a > 0$ y $a \neq 1$, pasa por los puntos...........................

i) Si $log_3 x = log_3 7$, entonces $x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$...

III-61 Indica verdadero o falso, encerrando en un círculo lo que corresponda.

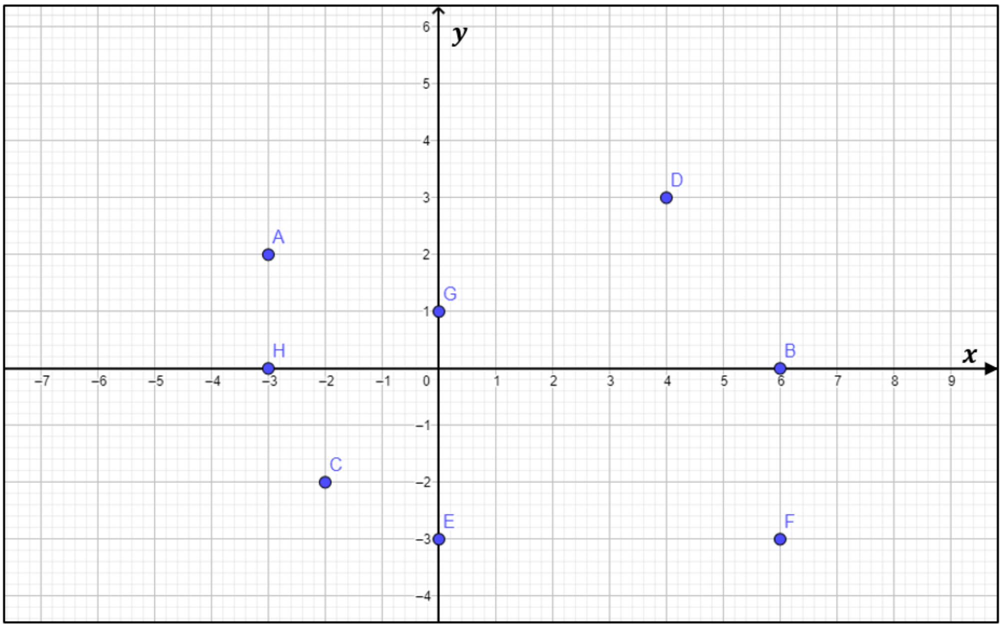
| | | |
|---|---|---|
| a) La gráfica de una función exponencial $f(x) = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$, pasa por los puntos $(0,1)$ y $(1, a)$. | V | F |
| b) Las gráficas de las funciones $f(x) = 3^{-x}$ y $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, son idénticas. | V | F |
| c) Si $y = log_a x$; entonces $y = a^x$. | V | F |

III-62 Expresa a $y$ como una función de $x$, la constante $C$ es un número positivo.

a. $\ln y = \ln x + \ln C$
b. $\ln y = 2\ln x - \ln(x+1) + \ln C$
c. $\ln y = \ln(x + C)$
d. $\ln y = 2\ln x + \ln(x+1) + \ln C$
e. $\ln y = 3x + \ln C$
f. $\ln(y - 3) = -4x + \ln C$

# 3.1 RESPUESTAS - FUNCIONES

III-01



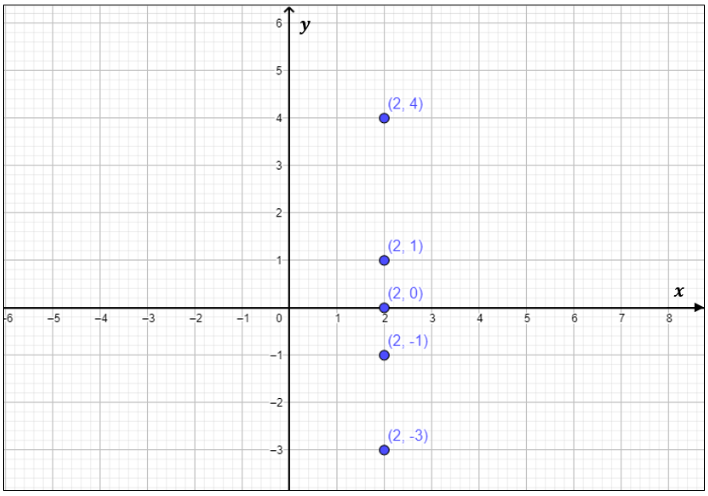

$A: II\ cuadrante$ $\quad$ $E: Eje\ de\ ordenadas$

$B: Eje\ de\ abscisas$ $\quad$ $F: IV\ cuadrante$

$C: III\ cuadrante$ $\quad$ $G: Eje\ de\ ordenadas$

$D: I\ cuadrante$ $\quad$ $H: Eje\ de\ abscisas$

III-02 a)




b) Los puntos están situados sobre una recta vertical, situada dos unidades a la derecha del eje de ordenadas.

c) Los puntos están situados sobre una recta horizontal situada tres unidades hacia arriba del eje de abscisas.

III-03 a) $f(0) = -4$ $\quad f(1) = -5$ $\quad f(-1) = -9$ $\quad f(3) = -25$

b) $f(0) = 0$ $\quad f(1) = \frac{1}{2}$ $\quad f(-1) = -\frac{1}{2}$ $\quad f(3) = \frac{3}{10}$

c) $f(0) = -\frac{1}{4}$ $\quad f(1) = 0$ $\quad f(-1) = 0$ $\quad f(3) = \frac{8}{13}$

d) $f(0) = -\frac{1}{5}$ $\quad f(1) = -\frac{3}{2}$ $\quad f(-1) = \frac{1}{8}$ $\quad f(3) = \frac{7}{4}$

III-04 a) $f(0) = 3;\ f(-6) = -3$ b) $positivo$ c) $f(11) = 1;\ f(6) = 0$
d) $negativo$ e) $x_1 = -3;\ x_2 = 6;\ x_3 = 10$ f) $ordenadas$
g) $abscisas$ h) $(-3; 6)\ (10; 11]$ i) $[-6; 11]$
j) $[-3; 4]$ k) $(-3; 0);\ (6; 0);\ (10; 0)$ l) $(0; 3)$
m) $3\ veces$ n) $2\ veces$ o) $(-3; 2)(8; 11)$

III-05 a) $f(2) = 4, f(6) = -1$ b) $negativo$ c) $x_1 = -6{,}5; x_2 = -0{,}5; x_3 = 4$
d) $x = -4{,}5$ e) $[-6{,}5; 11]$ f) $x_1 = -6; x_2 = -2; x_3 = 5{,}5\ ceros\ o\ raíces$
g) $(-6;\ -2) \cup (5{,}5;\ 11]$ h) $[-3; 4]$ i) $[-6{,}5;\ -6) \cup (-2;\ 5{,}5)$
j) $2\ veces$ k) $3\ veces$ l) $(0; 3)/Ordenada\ al\ origen/No$

III-06 1) a) $No$ b) $-3$ c) $14$ d) $(-\infty; 6)(6; \infty)$
2) a) $\frac{32}{3}$ b) $x_1 = -2; x_2 = \frac{2}{3}$ c) $(-\infty; 1)(1; \infty)$ d) $No$

III-07 a) $No\ es\ función.$
b) $Sí\ es\ función.\ Dom$: $(-\infty\ ; \infty)$.
$Recorrido$: $(0\ ; \infty)$.
$Interseca\ al\ eje\ de\ ordenadas\ en$: $(0; 1)$.
$No\ interseca\ al\ eje\ de\ abscisas.$
c) $No\ es\ función.$
d) $No\ es\ función.$
e) $Sí\ es\ función.\ Dom$: $(-\pi\ ; \pi)$.
$Recorrido$: $[-1; 1]$.
$Interseca\ al\ eje\ de\ ordenadas\ en$: $(0; 1)$.
$Interseca\ al\ eje\ de\ abscisas\ en$: $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)\ y\ \left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$.
f) $Sí\ es\ función.\ Dom$: $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
$Recorrido$: $(-\infty; \infty)$.
$Interseca\ a\ ambos\ ejes\ en\ el\ punto$ $(0; 0)$.

III-08 a) $(-\infty; \infty)$ d) $(-\infty; \infty)$
b) $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ e) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$
c) $(-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ f) $(-\infty; -3] \cup [3; \infty)$

III-09 a) $Es\ función.$ d) $No\ es\ función\ porque\ no\ cumple\ unicidad.$
b) $Es\ función\ para\ \mathbb{R} - \{0\}$. e) $Es\ función.$
c) $Es\ función\ para\ \mathbb{R} - \{0\}$. f) $No\ es\ función\ porque\ no\ cumple\ unicidad.$

III-10 No son iguales. Son funciones iguales en casi todo punto, pero difieren en $x = 1$.

III-11 *a.* $[-6; \infty)$

*b.* $[-4; \infty)$

*c.* $x_1 = -2;\ x_2 = 2;\ x_3 = 8$

*d.* $y = -1$

*e.* $(-2; 2) \cup (2; 8)$

*f.* $(-6; -4)(-3; -1)(2; 6)$

*g.* $y = 1$

*h.* $x_1 = -5;\ x_2 = -3;\ x_3 = 9$

*i.* $4\ veces$

*j.* $1\ vez$

*k.* $(0; -1)$

III-12 *a.* $y = 4$

*b.* $(-5; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 6]$

*c.* $(-\infty; 2) \cup [4; \infty)$

*d.* $x_1 = -3;\ x_2 = 3$

*e.* $y = 1$

*f.* $(-5; -2)(-2; 0)$

*g.* $(-5; -3)(-2; 2)3; 6]$

*h.* $No$

*i.* $Positivo$

III-13 *a.* $(-\infty; 9]$

*b.* $(-\infty; 6]$

*c.* $x_1 = -9;\ x_2 = -3;\ x_3 = 5$

*d.* $(-\infty; -6)(1; 9)$

*e.* $(-9; -3)(5; 9]$

*f.* $(0; -6)$

*g.* $x = 9$

*h.* $3\ veces$

*i.* $y = -6$

III-14 *a.* $y = 6$

*b.* $[-18; 22]$

*c.* $[-6; 10]$

*d.* $x_1 = -14;\ x_2 = -6;\ x_3 = 14$

*e.* $y = 6$

*f.* $(-10; -2)(2; 6)$

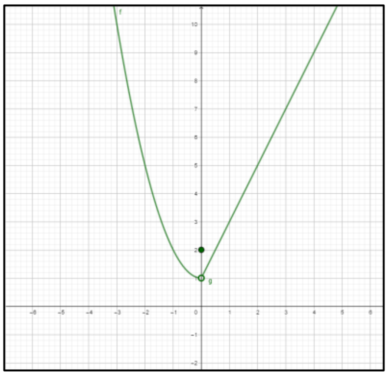
*g.* $(-14;-6), (14;22]$

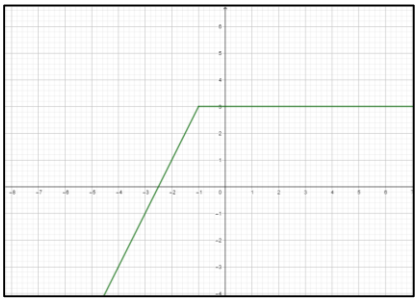
*h.* $x_1 = -12;\ x_2 = -8;\ x_3 = 22$

*i.* $4\ veces$

*j.* $Positivo$

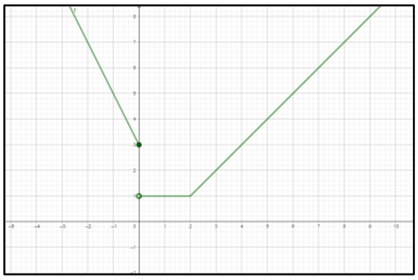
III-15 1) a) $f(-3) = 10; f(0) = 2; f(2) = 5$

b) 

2) a) 

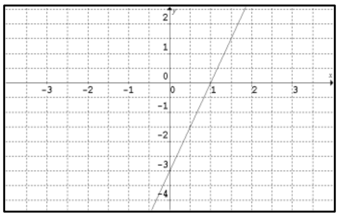
$Imagen\ g(x): (-\infty; 3]$

b) $g(3) = 3;\ \ g(0) = 3; g(-2) = 1; g(x) = 0 \rightarrow x = -\frac{5}{2}$

3) a) 

$Imagen\ h(x): [1, \infty)$

b) $h(-3) = 9; h(0) = 3; h(2) = 1; h(x) = 0 \rightarrow no\ se\ verifica$

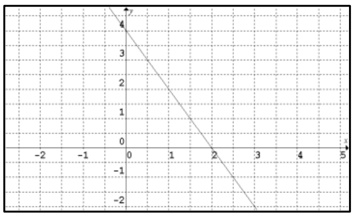
III-16 1. a) 

b) $Dom\ f: (-\infty; \infty)$

c) $Recorrido\ f: (-\infty; \infty)$

d) $(0, -3)$

e) $(1,0)$

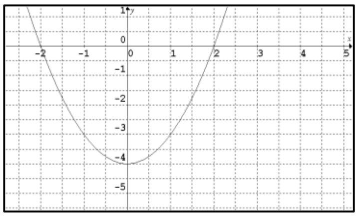
2. a) 

b) $Dom\ g: (-\infty; \infty)$

c) $Recorrido\ g: (-\infty; \infty)$

d) $(0,4)$

e) $(2,0)$

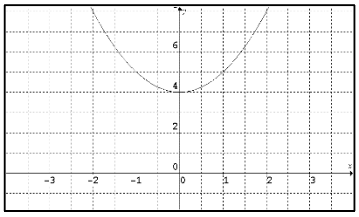
3. a) 

b) $Dom\ h$: $(-\infty; \infty)$

c) $Recorrido\ h$: $[-4; \infty)$

d) $(0, -4)$

e) $(-2,0)$ $(2,0)$

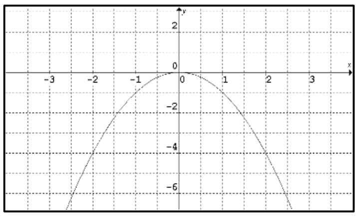


b) $Dom\ j$: $(-\infty; \infty)$

c) $Recorrido\ j$: $[4; \infty)$

d) $(0,4)$

e) *No hay intersección.*

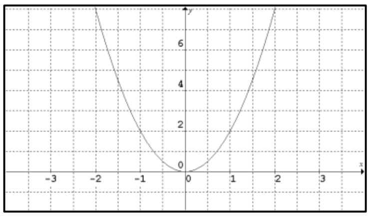
5. a) 

b) $Dom\ k$: $(-\infty; \infty)$

c) $Recorrido\ k$: $(-\infty; 0]$

d) $(0,0)$

e) $(0,0)$

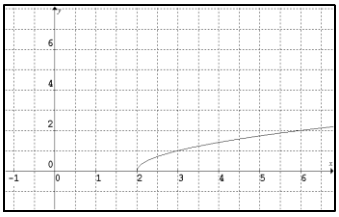
6. a) 

b) $Dom\ l$: $(-\infty; \infty)$

c) $Recorrido\ l$: $[0; \infty)$

d) $(0,0)$

e) $(0,0)$

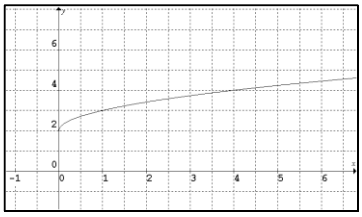
7. a) 

b) $Dom\ m$: $[2; \infty)$

c) $Recorrido\ m$: $[0; \infty)$

d) *No hay intersección.*

e) $(2,0)$

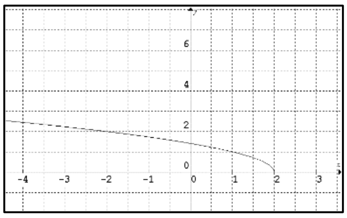
8. a) 

b) $Dom\ n$: $[0; \infty)$

c) $Recorrido\ n$: $[2; \infty)$

d) $(0,2)$

e) *No hay intersección*

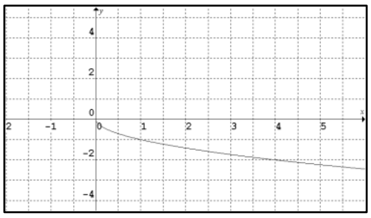
9. a) 

b) $Dom\ o$: $(-\infty;\ 2]$

c) $Recorrido\ o$: $[0; \infty)$

d) $(0, \sqrt{2})$

e) $(2,0)$

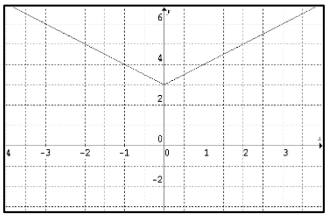
10. a) 

b) $Dom\ p$: $[0; \infty)$

c) $Recorrido\ p$: $(-\infty;\ 0]$

d) $(0,0)$

e) $(0,0)$

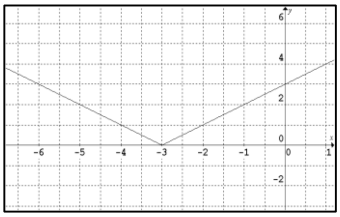
11. a) 

b) $Dom\ q$: $(-\infty;\infty)$

c) $Recorrido\ q$: $[3;\infty)$

d) $(0,3)$

e) $No\ hay\ intersección$

12. a) 

b) $Dom\ r$: $(-\infty;\infty)$

c) $Recorrido\ r$: $[0;\infty)$

d) $(0,3)$

e) $(-3,0)$

III-17 a) $Dom\ f$: $[-5,4]$ $\quad$ $Recorrido\ f\ [-4,1]$

b) $Intervalo\ de\ crecimiento$: $(3,4)$

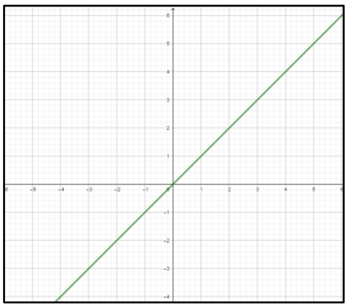
c) $f\ es\ constante\ en\ (-5,-1)$

d) $f\ interseca\ al\ eje\ de\ ordenadas\ en\ (0,0)\ y\ al\ eje\ de\ abscisas\ en\ (0,0)\ y\ en\ (4,0)$.

III-18 $Imagen\ de\ f(x)$: $\{k\}$

III-19 a) $f(x) = x$

b) $f(4) = 4$

c) 

III-20 a) $m = 5;\ b = 0$ $\quad$ b) $m = 1;\ b = 0$ $\quad$ c) $m = -3;\ b = \frac{1}{2}$

d) $m = 2;\ b = 4$ $\quad$ e) $m = -1;\ b = -3$ $\quad$ f) $m = -2;\ b = 4$

III-21 a) $V$ b) $V$ c) $V$ d) $V$ e) $F$ f) $V$

III-22 a. Las gráficas de las funciones $g$, $h$ y $j$ son iguales a la curva representativa de $f$; pero se hallan desplazadas verticalmente. ($g$ está "corrida" 2 unidades hacia arriba; $h$ está "corrida" 4 unidades hacia arriba; mientras que $j$ está "desplazada" 2 lugares hacia abajo).

En conclusión; dada $y = x^2 + k$, si $k > 0$, $y = x^2$ se desplaza $k$ unidades hacia arriba; mientras que, si $k < 0$, se desplaza $k$ unidades hacia abajo.

b. $k(x)$ tendrá la misma representación que $f(x)$; pero desplazada 4 lugares hacia abajo; mientras que $l(x)$ tendrá la misma representación que $f(x)$; pero desplazada 5 lugares hacia arriba.

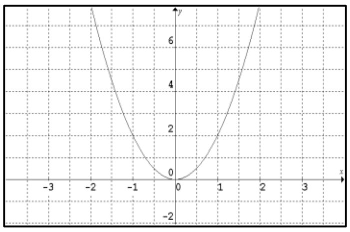
III-23 a. Las gráficas de las funciones $g$, $h$ y $j$ son iguales a la curva representativa de $f$; pero se hallan desplazadas horizontalmente. ($g$ está "corrida" 2 unidades hacia la derecha; $h$ está "corrida" 4 unidades hacia la derecha; mientras que $j$ está "desplazada" 2 lugares hacia la izquierda).

En conclusión; dada $y = (x + k)^2$, si $k > 0$, la función $y = x^2$ se desplaza $k$ unidades hacia la izquierda; mientras que, si $k < 0$, se desplaza $k$ unidades hacia la derecha.

b. $k(x)$ tendrá la misma representación que $f(x)$; pero desplazada 4 lugares hacia la izquierda; mientras que $l(x)$ tendrá la misma representación que $f(x)$; pero desplazada 5 lugares hacia la derecha.

III-24 1. a) $arriba$

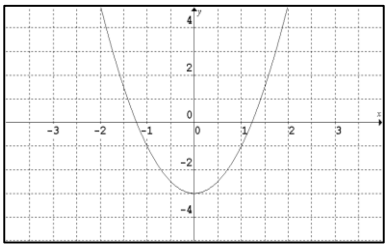
b) $V: (0,0); raíces: x = 0; ordenada\ al\ origen: y = 0; eje\ de\ simetría: x = 0$

c) 

d) $D = (-\infty, \infty); I = [0, \infty)$ ; $IC: (0, \infty); ID: (-\infty, 0); IP: (-\infty, 0)U(0, \infty)$.

2. a) $arriba$

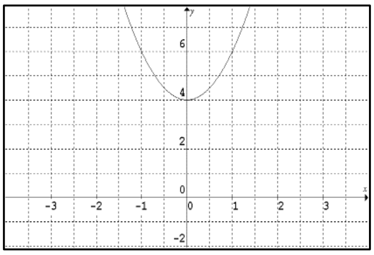
b) $V: (0, -3)$; $raíces: x_1 = 1{,}22\ x_2 = -1{,}22$; $ord. al\ origen: y = -3; eje\ de\ simetría: x = 0$

c) 

d)$D = (-\infty, \infty)$;$I = [-3, \infty)$; $IC: (0, \infty)$; $ID: (-\infty, 0)$; $IP: (-\infty; -1{,}22)(1{,}22; \infty)$; $IN: (-1{,}22; 1{,}22)$

3. a) $arriba$

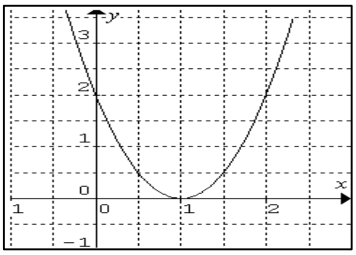
b) $V: (0,4); raíces: no\ tiene; ordenada\ al\ origen: y = 4; eje\ de\ simetría: x = 0$

c) 

d) $D = (-\infty, \infty); I = [4, \infty)$ ; $IC: (0, \infty); ID: (-\infty, 0); IP: (-\infty, \infty)$

4. a) $arriba$

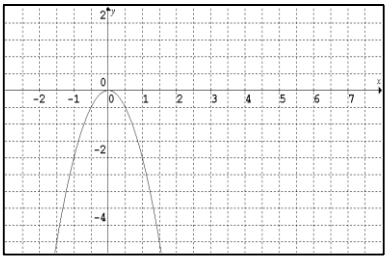
b) $V: (1,0); raíces: x = 1; ordenada\ al\ origen: y = 2; eje\ de\ simetría: x = 1$

c) 

d) $D = (-\infty, \infty); I = [0, \infty)$ ; $IC: (1, \infty); ID: (-\infty, 1); IP: (-\infty, 1)U(1, \infty)$

5. a) $abajo$

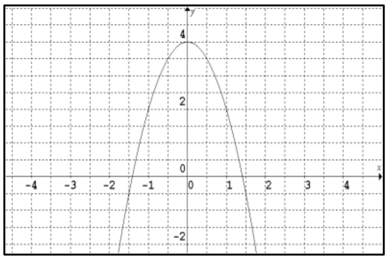
b) $V$: $(0,0)$; $raíces$: $x = 0$; $ordenada\ al\ origen$: $y = 0$; $eje\ de\ simetría$: $x = 0$

c) 

d) $D = (-\infty, \infty)$; $I = (-\infty, 0]$ ; $IC$: $(-\infty, 0)$; $ID$: $(0, \infty)$; $IN$: $(-\infty, 0)U(0, \infty)$

6. a) $abajo$

b) V: (0,4); $raíces$: $x_1 = \sqrt{2}$ ; $x_2 = -\sqrt{2}$; $ord. al\ origen$: $y = 4$; $eje\ de\ sim$: $x = 0$

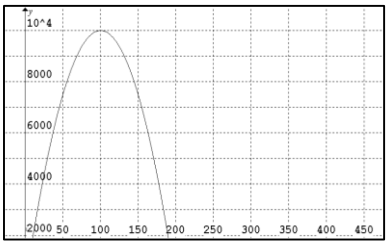
c) 

d) $D = (-\infty, \infty)$;$I = (-\infty, 4]$; $IC$: $(-\infty, 0)$; $ID$: $(0, \infty)$; $IP$: $(-\sqrt{2}\ ; \sqrt{2})$; $IN$: $(-\infty, -\sqrt{2})U(\sqrt{2}, \infty)$

III-25

| | | |
|---|---|---|
| a) $x_1 = 3$ y $x_2=3$ | $y_0 = 9$ | V(3;0) |
| b) $x_1 = 2$ y $x_2 = 2$ | $y_0 = 2$ | V(2;0) |
| c) $x_1 = 3$ y $x_2 = -2$ | $y_0 = 6$ | V(1/2;25/4) |
| d) $x_1 = 1/2$ y $x_2 = -1$ | $y_0 = -1/2$ | V(-1/4;-9/16) |
| e) $x_1 = 2$ y $x_2 = ½$ | $y_0 = 1$ | V(5/4;-9/16) |
| f) $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ | $y_0 = 0$ | V(0;0) |

III-26 1.d 3.a 7.b 8.e 2.f 6.g 5.c 4.h

III-27 a) $A = 200x - x^2$ b) (0,200) c) 

III-28 V = $2\pi r^3$

III-29 a.

| | | | |
|---|---|---|---|
| v(km / h ) | 40 | 20 | 110 |
| r (km / l ) | 11,2 | 6,4 | 15,4 |

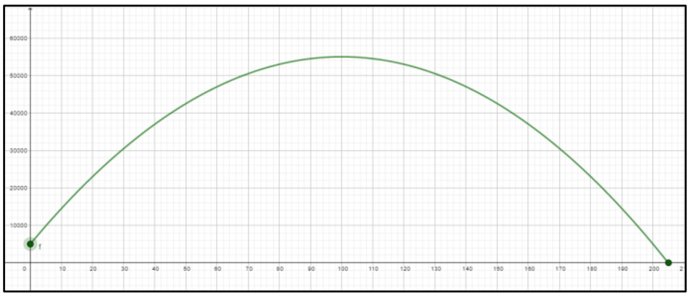
b. La velocidad es $90 km/h$ y el máximo rendimiento es de $16,2\ km/l$.

III-30 T = 96.86

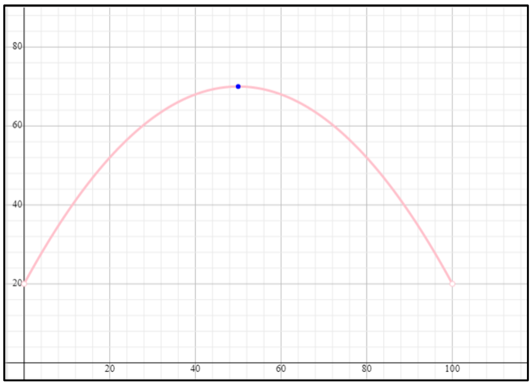
III-31 a) $x = 100$

b) $P = 55\ 000$

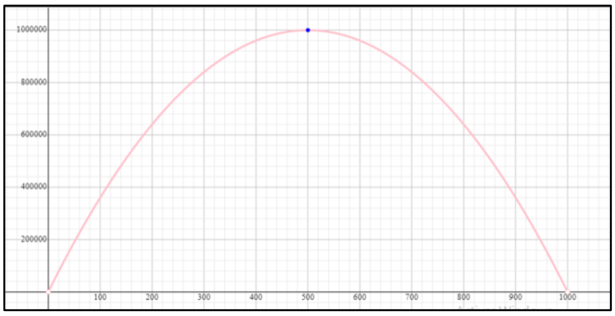
c)



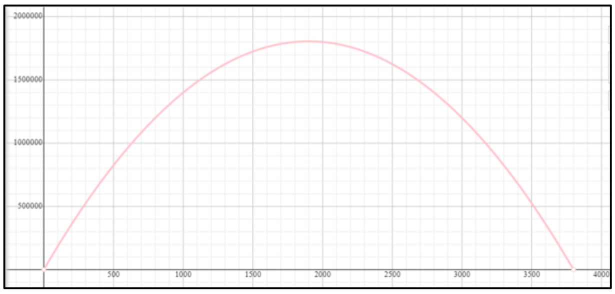
III-32 Peso máximo = 70 gramos.




III-33 Precio unitario: 500 dólares - Ingreso máximo: 1 000 000 dólares.




III-34 Precio unitario: 1900 dólares - Ingreso máximo: 1 805 000 dólares.




III-35 3,3 m de ancho y 3,3 m de largo.

III-36 a) $1{,}05m$

b) Alcanza la máxima altura para $t = 1\ segundo$.

c) La máxima altura alcanzada es de 6,05 $m$.

d) La pelotita llega al suelo, después de 2,1 $segundos$ de haber sido lanzada.

III-37 a) 11,212 b) 12,514 c) 13,967 d) 15,588

e) 0,089 f) 0,080 g) 0,072 h) 0,064

III-38 1.a 2.b 3.e 4.f 5.g 6.h 7.c 8.d

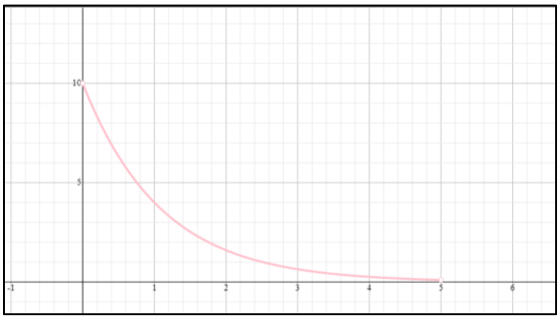
III-39 a) 90 ciervos b) 59 ciervos c) 34 ciervos

III-40 a) p = 568,68 b) p = 178,27

III-41 a) w = 44,35 b) w = 11,61

III-42 a) A = 0,35 $cm^2$ b) A = 0,03 $cm^2$

III-43 a) 1,6 cal s/$cm^2$ b)

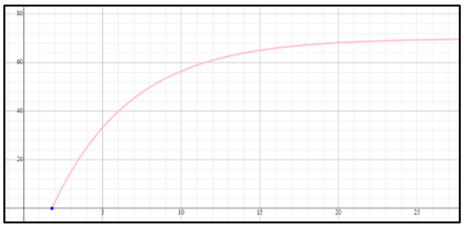


III-44 a) R = 56,47%

b) x =4,58 días

c) R = 70%

d) t > 6 días

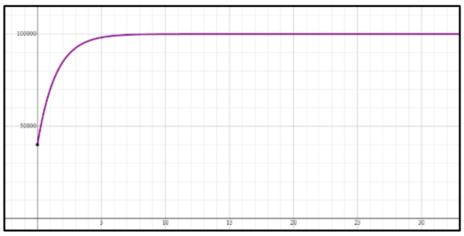


III-45 a) p = $98125

b) p= $ 99941,40

c) p= $ 100000

d) x = 283 días 19 hs.



III-46 a) Dom: (-∞ , 3) b) Dom: (5 , ∞) c) Dom: (0 , 1) ∪ (1 ,∞)

III-47 a) 36,78% b) n ≅ 7 cristales c) n ≅ 13 cristales d) n ≅ 8 cristales

III-48 a) A los 2 años el lago tendrá 5370 individuos de la especie.

b) Respuesta: A los 4,6 años el lago tendrá 10000 individuos de la especie.

III-49 a) Quedarán sin disolver 12,17 gramos de sal.

b) Deberán transcurrir 21,05 segundos.

III-50 a) Posee 250$mg$.

b) No, porque la función es asintótica al eje de abscisas.

c) Se encuentran $33{,}83\ mg$.

d) Pasó 1,71 hora.

III-51 a) pH = 7 b) $[H^+] = 6{,}3.10^{-5}$

III-52 a) d = 4 meses 7 días b) d = 19 meses 6 días

III-53 h = 2 hs 18 minutos

III-54 a) N = 362 estudiantes.

b) d ≅ 4 días

III-55 a) k ≅ 0,02 b) L ≅ 36 palab. c) L ≅ 52 palab. d) t ≅ 115,13 min.

III-56 a) k = - 20,07 b) R ≅ 91% c) x = 0,175 d) $x \geq 0{,}08$

III-57 a) P ≅ 37,3 vatios b) d ≅ 6,93 decibeles

III-58 a) t ≅ 40,54 horas b) t ≅ 69,31 horas

III-59 Dom: f(x): $\{x/x \in R \wedge x \neq 0\}$ Dom: g(x): $\{x/x \in R^+\}$

III-60 a) (0,1) y (1, a) b) x = 4 c) uno d) la suma e) uno

f) M =7 g) Reales positivos h) uno i) (1,0) y (a,1) j) x = 7

III-61 a) V b) V c) F

III-62 a) $y = Cx$ b) $y = C\frac{x^2}{x+1}$ c) $y = x + C$

d) $y = Cx^2(x+1)$ e) $y = Ce^{3x}$ f) $y = Ce^{-4x} + 3$

# 4. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un **sistema de ecuaciones** es una colección de dos o más ecuaciones, cada una de las cuales contiene una o más variables. **Resolver** un sistema de ecuaciones significa determinar todas las soluciones del sistema. La **solución** de un sistema de ecuaciones es un conjunto de valores para las variables para los cuales cada ecuación del sistema resulta un enunciado verdadero.

➯ Verifique si los valores dados de las variables son soluciones del sistema de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$ $x = 2; y = -1$

b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x.y = 2 \end{cases}$ $x = 2; y = 1$

c) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x.y = 2 \end{cases}$ $x = -2; y = -1$

IV-01 Resuelve cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones. Clasifícalos según sus soluciones.

a) $\begin{cases} -2x - 2y = 4 \\ x + y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 5x + 10y = 4 \end{cases}$

IV-02 Un sistema de ecuaciones puede expresarse también en lenguaje coloquial (verbal) y el primer paso a seguir para encontrar la solución es armar el sistema en lenguaje simbólico mediante fórmulas (ecuaciones) que relacionen los datos con las incógnitas.

➯ Enunciado: "El perímetro de un piso rectangular es de 90m. Determine las dimensiones del piso si la longitud es el doble del ancho".

Para armar el sistema de ecuaciones en lenguaje simbólico que represente al enunciado, lo primero que tendremos que realizar es identificar las variables.

En este caso ¿cuáles y cuántas son?

Asigna una letra distinta a cada una de ellas.

Lee atentamente la primera parte del enunciado del problema, ¿qué dice?

*"El perímetro de un piso rectangular es de 90m …"*

Leído esto, ¿cuáles son las palabras claves que deberías tener en cuenta para armar la primera ecuación del sistema?, es decir ¿cómo se relacionan las variables?

Anímate, escribí la primera ecuación: ……………………………………………

Ahora vamos por la segunda ecuación. Leamos la segunda parte del enunciado: *"… Determina las dimensiones del piso si la longitud es el doble del ancho"*

En esta parte del enunciado ¿cuáles serán las palabras claves que tendrás que tener en cuenta?

¡Bien!, *"la longitud es el doble del ancho".*

¿Cómo expresarías en lenguaje simbólico esta expresión verbal?

¿Con qué letra denominaste a la longitud del piso?

✍ Te animamos a escribir ahora esta expresión simbólica.

¡Ya está! Tenés armada la segunda ecuación que forma el sistema de ecuaciones

¿Qué tendrás que hacer ahora para hallar la solución del sistema?

**No te olvides de dar la respuesta en forma verbal, indicando las unidades si fuera posible.**
✍ Resuelve

IV-03 La diferencia de dos números es 40. Seis veces el menor menos el mayor es igual a 5. Determina los dos números.

IV-04 En una lucha entre moscas y arañas intervienen 42 cabezas y 276 patas. ¿Cuántos luchadores había de cada clase? (Recuerda que una mosca tiene 6 patas y una araña 8 patas).

IV-05 La cantidad de cerca necesaria para alambrar un campo rectangular es de 3000m ¿Cuáles son las dimensiones del campo si se sabe que la diferencia entre la longitud y el ancho es de 50 m?

IV-06 Un crucero tiene habitaciones dobles (2 camas) y sencillas (1 cama). En total tiene 47 habitaciones y 79 camas ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

IV-07 La gerente de un restaurante desea adquirir 200 juegos de platos. Un diseño cuesta $25 por juego y otra cuesta $45 por juego. Si ella sólo desea gastar $7400 ¿Cuántos juegos de cada diseño debe ordenar?

IV-08 Un distribuidor de café mezcla un nuevo café que costará $39 por kilo. El café será una mezcla de un tipo de café de $30 por kilo y de otro de $60 por kilo. ¿Cuánta cantidad de cada café debe usar para obtener la mezcla deseada? (Suponga que el peso del café mezclado es de 100 kilos)

IV-09 Tengo 30 billetes. Unos son de cinco pesos y otros de dos pesos.

a) ¿Puedo tener en total 78 pesos?
b) ¿Y puedo tener 81 pesos?

IV-10 La tienda donde compramos no marca los precios de los artículos. Mi esposa fue a la tienda, compró tres paquetes de panceta de 1 Kg cada uno, y dos cartones de huevos, pagó un total de $ 745. Sin saber que ella había ido a la tienda, yo también fui, compré un paquete de panceta y tres cartones de huevos, pagando un total de $ 645. Ahora queremos devolver dos paquetes de panceta y dos cartones de huevos. ¿Cuánto dinero nos devolverán?

IV-11 En una librería ofrecen un kit escolar integrado por 3 cuadernos y 3 repuestos de hojas a $390 y otro kit formado por 2 cuadernos y 1 repuesto de hojas, de igual característica que los anteriores, a sólo $210. Se quiere saber:

a) ¿Cuál es el precio de un cuaderno?

b) ¿Cuál es el precio de un repuesto?

IV-12 Mi padrino tiene 80 años y me contó el otro día que entre nietas y nietos suman 8 y que si les diese $1.000 a cada nieta y $500 a cada nieto se gastaría $6.500 ¿Cuántos nietos y nietas tiene mi padrino?

IV-13 El lunes María compra 2 pantalones y 3 camisas de vestir en un comercio y gasta $4650. El día martes su hermana compra en el mismo comercio 10 pantalones y 8 camisas del mismo tipo que las que compró María y gastó $17300. Si el comercio no había variado el precio de sus productos, ¿Cuánto cuesta cada pantalón? ¿Cuánto cuesta cada camisa?

IV-14 En un concierto benéfico se venden todas las entradas y se recaudan 230 000 pesos. El precio de las entradas generales es $500 y el precio de las entradas especiales es $3000.

a) Calcule el número de entradas vendidas de cada tipo si la capacidad del establecimiento es de 160 personas.
b) Identifique con precisión el nombre de las variables involucradas en el planteo.

IV-15 Para cada uno de los siguientes enunciados,

a) Identifique en cada caso las incógnitas, y asigne una letra a cada una de ellas.
b) Plantee el sistema de ecuaciones asociados. (no resuelva)
   i. En un examen de matemática con diez ejercicios de opción múltiple, Andrea ha resuelto nueve y ha obtenido 64 puntos. Sabiendo que las respuestas correctas suman 10 puntos y las incorrectas restan 3 puntos, ¿cuántos ejercicios resolvió bien Andrea, y en cuántos se equivocó?
   ii. En un triángulo isósceles de 35 cm de perímetro los lados iguales tienen el doble de longitud que el lado desigual. ¿Cuál es la medida de cada lado del triángulo?

IV-16 En un triángulo cuyos ángulos son $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$; se sabe que la amplitud de $\hat{\alpha}$ es 50°, y la amplitud de $\hat{\beta}$ es 30° mayor al doble de la amplitud de $\hat{\gamma}$. El sistema de ecuaciones que permite calcular las amplitudes de $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$ es:

| | | |
|---|---|---|
| a) | $\begin{cases} \gamma + \beta = 130° \\ \beta = 2\gamma + 30° \end{cases}$ | |
| b) | $\begin{cases} \gamma + \beta - 130° = 0 \\ 2\beta + 30° = \gamma \end{cases}$ | |
| c) | $\begin{cases} \beta = \frac{1}{2}\gamma - 30° \\ \beta + \alpha = 130° \end{cases}$ | |
| d) | $\begin{cases} \alpha + \dfrac{1}{2}\beta - 30° + \gamma = 180° \\ \beta - 30° = 2\gamma \end{cases}$ | |
| e) | Ninguna de las respuestas anteriores es correcta | |

IV-17 En un taller hay 110 vehículos entre autos y motos; y la cantidad de ruedas de todos los rodados suman 360. Si se representa con la letra $\boldsymbol{a}$ al número de autos, y con la letra $\boldsymbol{m}$ a la cantidad de motos en el taller; un sistema de ecuaciones que permite calcular la cantidad de vehículos de cada tipo es:

| | | |
|---|---|---|
| a) | $\begin{cases} 4a + 2m = 110 \\ a + m = 360 \end{cases}$ | |
| b) | $\begin{cases} m = 110 - a \\ 4a + 2m = 360 \end{cases}$ | |
| c) | $\begin{cases} 2m = 110 - 4a \\ m = 360 + a \end{cases}$ | |
| d) | $\begin{cases} m = 110 + a \\ 2m = 360 + 4a \end{cases}$ | |
| e) | Ninguna de las respuestas anteriores es correcta | |

# 4.1 RESPUESTAS de SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

IV-01 a) incompatible b) infinitas soluciones, compatible indeterminado.

c) $x = \frac{1}{5}; y = \frac{3}{10}$ compatible determinado.

IV-02 x = 30 y = 15

IV-03 x= 49 y = 9

IV-04 30 moscas y 12 arañas

IV-05 ancho= 725 m, largo = 775 m

IV-06 dobles 32 y sencillas 15

IV-07 80 de $25 y 120 de $45

IV-08 70 kg de $30 y 30 de $60

IV-09 a) Sí, 6 de $5 y 24 de $2 b) Sí, 7 billetes de $5 y 23 de $2

IV-10 Devolución $ 610

IV-11 cuadernos $80 y repuestos $50

IV-12 5 nietas y 3 nietos

IV-13 Pantalón: $1050 y Camisa: $850

IV-14 a) Entradas generales: 100 Entradas especiales: 60

b) E: Número de entradas especiales vendidas G: Número de entradas generales vendidas

IV-15 i a) C: Número de respuestas correctas I: Número de respuestas incorrectas.

b) $\begin{cases} C + I = 9 \\ 10C - 3I = 64 \end{cases}$

ii a) I: Longitud de cada uno de los lados iguales D: Longitud del lado desigual

b) $\begin{cases} 2I + D = 35 \\ I = 2D \end{cases}$

IV-16 Opción a)

IV-17 Opción b)

# 5. GEOMETRÍA

## RELACIONES FUNDAMENTALES

V-01 Completa con nulo, agudo, recto, obtuso o llano según corresponda:

a) El suplemento de un ángulo agudo es un ángulo ___________________________________

b) El complemento de un ángulo agudo es un ángulo _________________________________

c) El suplemento de un ángulo recto es un ángulo ___________________________________

d) El complemento de un ángulo recto es un ángulo __________________________________

e) El suplemento de un ángulo obtuso es un ángulo _________________________________

f) El suplemento de un ángulo llano es un ángulo ___________________________________

g) El suplemento de un ángulo nulo es un ángulo ____________________________________

h) El complemento de un ángulo nulo es un ángulo __________________________________

V-02 Completa en la línea de puntos con a veces, siempre o nunca.

a) Los ángulos complementarios .......................... son congruentes.

b) Los ángulos adyacentes..................................son suplementarios.

c) Los ángulos suplementarios.......................... son adyacentes.

d) Los ángulos adyacentes..................................son consecutivos.

e) Los ángulos adyacentes..................................son complementarios.

f) Dos ángulos rectos…………………………………….son suplementarios.

g) Dos ángulos rectos……………………………………son complementarios.

h) Dos ángulos rectos…………………………………..son adyacentes.

V-03 Dados los ángulos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$, cuyas amplitudes son: $\alpha = 38°15'$ y $\beta = 17°38'$. Calcula utilizando la calculadora, las amplitudes de:

a) El complemento de la diferencia entre $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$.
b) El suplemento de la suma de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$.
c) La mitad del complemento de $\hat{\beta}$.
d) El suplemento de la tercera parte de $\hat{\alpha}$.

V-04 Completa las siguientes expresiones, si $A = 44°22´3''$ y $B = 15°9´23''$.

a) El doble del suplemento de $\hat{A}$ mide.......................

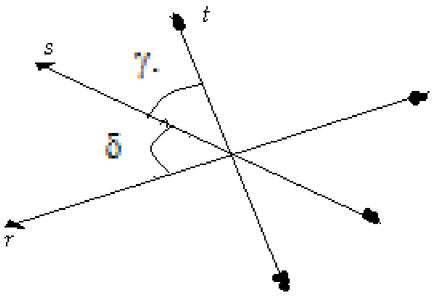
b) La mitad del complemento de $\hat{A} + \hat{B}$ mide:..................

c) El triple del complemento de $\hat{A} - \hat{B}$ mide:....................

d) La mitad del suplemento de $\hat{B}$ mide:............................

V-05 Resuelve:

a) Calcula la amplitud de $\gamma$ y la amplitud de $\delta$ sabiendo que $r \perp t$ y que $\delta$ tiene el doble de amplitud que $\gamma$.




b) Si $L_1 \,//\, L_2$, y sabiendo que $\beta$ mide la mitad de $\alpha$, entonces la medida del ángulo $\alpha$ es:

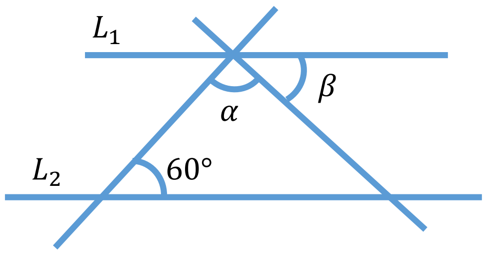
a) 40° ( )

b) 80° ( )

c) 60° ( )

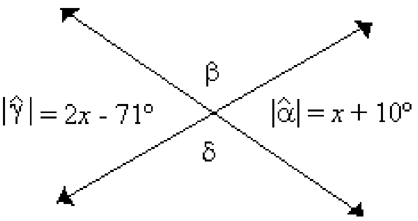
d) 90° ( )

e) Ninguno de los anteriores ( )

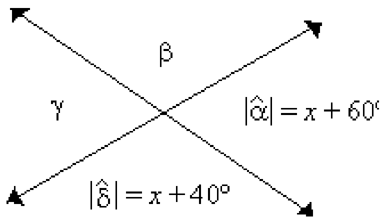



V-06 Calcula $x$ y las amplitudes de $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$ en cada caso. Justifica.

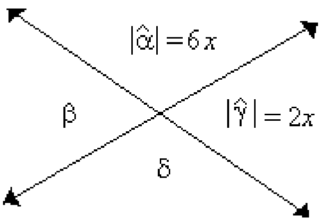
a)



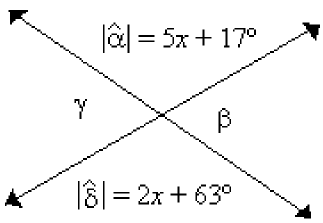

b)



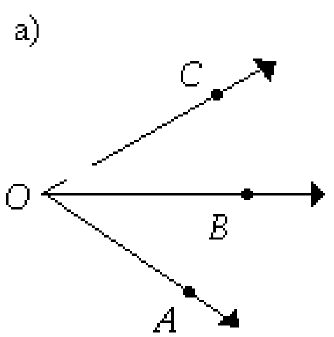

c)

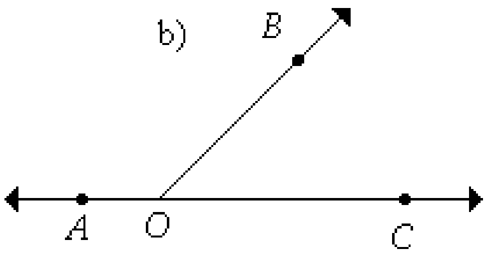



d)



V-07 En las siguientes figuras, calcula las amplitudes de todos los ángulos indicados:




$BOC = 4z$

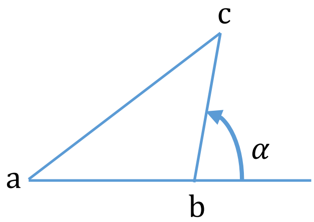
$AOB = 3z + 18°$

$\overrightarrow{OB}$ es bisectriz de $\widehat{AOC}$

$AOB = z + 30°$

$BOC = 2z - 60°$

V-08 Un ángulo α exterior del triángulo de la figura mide 30° más que un ángulo interior no adyacente a él y 50° más que el otro ángulo interior no adyacente a él. ¿Cuánto mide el ángulo interior adyacente a él?




a) La primera tarea será extraer los datos consignados en el enunciado y en la figura e identificar la incógnita.

$$\alpha = \mathrm{a} + 30°$$
$$\alpha = \mathrm{c} + 50°$$
$$\alpha \ \textit{ángulo exterior del triángulo}\ \mathrm{abc, adyacente\ a}\ \hat{\mathrm{b}}.$$

La amplitud del ángulo $\hat{b}$ es nuestra incógnita.

b) ¿Qué puedes decir de α respecto del triángulo $abc$?

*α es ángulo exterior del triángulo abc*

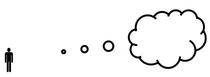
c) ¿Qué relaciones cumple α con los ángulos interiores del triángulo $abc$?

$$\mathrm{a} + \mathrm{c} = \alpha \qquad y \qquad \alpha + \mathrm{b} = 180°$$

d) Teniendo en cuenta las relaciones establecidas en el inciso a), las podemos sumar, obteniendo:

$$2\alpha = \mathrm{a} + \mathrm{c} + 80° \quad \text{despejando} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a} + \mathrm{c} = 2\alpha - 80°$$

e) ¿Podemos relacionar las expresiones obtenidas en los incisos c) y d)?

Recordemos: 

Si los primeros miembros son iguales los segundos también lo son. Luego:

$\alpha = 2\alpha - 80°$ luego despejando $\alpha$ obtenemos $\alpha = 80°$

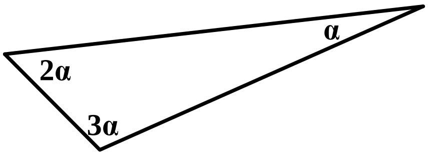
Teniendo en cuenta que $\alpha + b = 180°$, reemplazando el valor de $\alpha$

Luego, el valor de la incógnita será: $\hat{b} = 100°$.

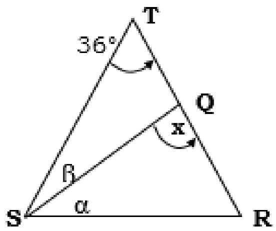
ESTA ES UNA DE LAS FORMAS DE ENCONTRAR LA SOLUCIÓN AL PROBLEMA.

- Te proponemos que encuentres alguna otra manera de resolverlo.

V-09 ¿Cuál es el valor de cada ángulo, si la suma de los tres da 180°?




V-10 En el triángulo SRT se tiene TS = TR; además SQ divide al ángulo S de modo que $\beta$ es el doble de $\alpha$. Calcula la medida del ángulo "x".




Solución

a) Su primera tarea consiste en extraer los datos consignados en el enunciado y en la figura e identificar la incógnita.

b) ¿Qué podemos decir acerca del dato que medida de TS = medida TR en el triángulo STR?

c) ¿Con la información que tiene hasta ahora, qué relación hay entre los ángulos S y R? ¿Cómo los calcularías?

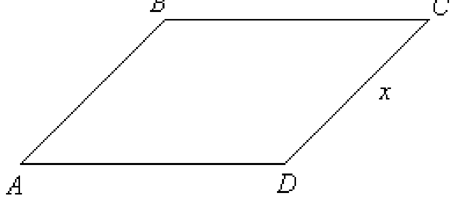
***<u>Nota</u>: Recuerda la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos interiores del triángulo.***

d) ¿Qué relaciones surgen de los datos del problema entre los ángulos $\alpha$, $\beta$ y S? Utilízalas para calcular $\alpha$ y $\beta$.

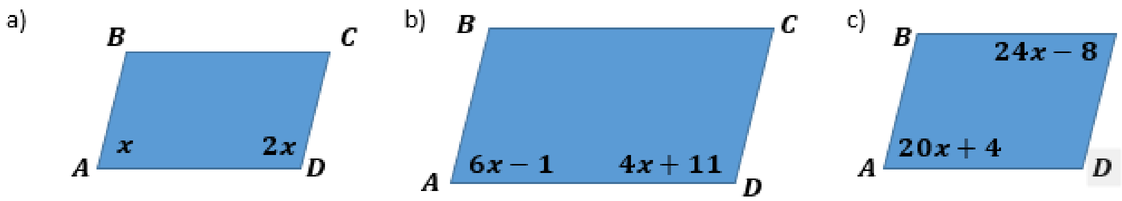
e) La incógnita, "x", es un ángulo interior, ¿de qué triángulo? Teniendo esto en mente, calcula su valor.

V-11 El perímetro del paralelogramo es de 32 cm. ¿Cuál es la longitud de cada lado? (aproximado en milímetros)

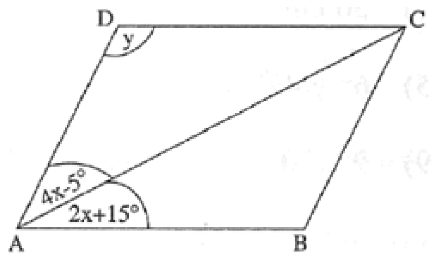
$$\frac{6x - 1cm}{3}$$



V-12 Encuentra las medidas de todos los ángulos interiores de los siguientes paralelogramos.




V-13 Si ABCD es un rombo, la amplitud de $DAC = 4x - 5$ y la amplitud de $CAB = 2x + 15$; encuentra la amplitud del ángulo $ADC$.




V-14 ¿Para qué cuadrilátero (paralelogramo, rectángulo, rombo, cuadrado) se podría demostrar cada una de las siguientes propiedades?

a) Las diagonales se bisecan.

b) Las diagonales son congruentes.

c) Los ángulos consecutivos son congruentes.

d) Las diagonales bisecan a los ángulos de un cuadrilátero.

e) Las diagonales son perpendiculares.

f) Los ángulos opuestos son congruentes.

g) Las diagonales son congruentes y perpendiculares.

V-15 Indica el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones.

| | | |
|---|---|---|
| a) La altura correspondiente a un lado de un triángulo es la semirrecta que se traza desde un vértice y pasa por el punto medio del lado opuesto. | V | F |
| b) La mediana correspondiente a un lado de un triángulo es el segmento que se traza desde un vértice al punto medio de lado opuesto. | V | F |
| c) La mediatriz correspondiente a un lado de un triángulo es la recta perpendicular a un lado en su punto medio. | V | F |

V-16 La medida de la altura correspondiente a un cateto de un triángulo rectángulo isósceles es igual a $5\sqrt{3}$. Calcular la medida de la hipotenusa.

*a) Realiza un esquema de la situación planteada. (No olvides identificar los elementos de la figura con letras)*

*b) Identifica los datos y la incógnita.*

c) *Por ser un triángulo rectángulo, ¿qué propiedad relaciona la hipotenusa con los catetos? Escribe su expresión simbólicamente.*

d) Volviendo a los datos, ¿cómo podemos escribir la expresión anterior sabiendo que el triángulo es isósceles?

e) *Al dibujar la altura en tu esquema, ¿en qué punto corta a la hipotenusa? ¿qué tipo de triángulos determina? ¿En estos triángulos, ahora, cuál es la hipotenusa?*

f) *¿Cuál es la expresión que relaciona esta hipotenusa con sus catetos? ¿Puedes escribirla?*

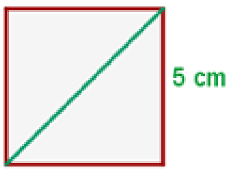
*Cómo puedes relacionar esta expresión con la obtenida en el inciso*

***¡Vamos!** Resuelve y llega al resultado*

V-17 Si un polígono regular tiene 12 lados, cada uno de sus ángulos interiores mide entonces:

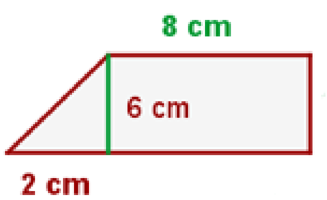
| | |
|---|---|
| a) 60° | ( ) |
| b) 90° | ( ) |
| c) 150° | ( ) |
| d) 75° | ( ) |
| e) Ninguno de las anteriores | ( ) |

V-18 Halla la diagonal, el perímetro y el área del cuadrado:



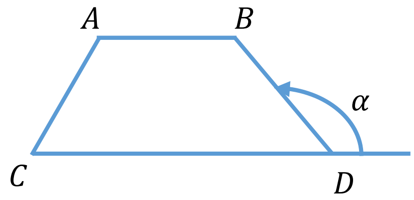

V-19 Para los siguientes trapecios,

a) Hallar el perímetro y el área del trapecio rectángulo:

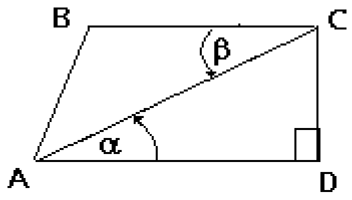


b) Averigua la amplitud de cada ángulo interior de la siguiente figura, considerando que:

$A = 2C, C = 3x, B = A + 10°$ y $\alpha = 130°$.




c) Dado el trapecio rectángulo de la figura, indicar verdadero o falso según corresponda:




a) $\alpha = \beta$ V- F

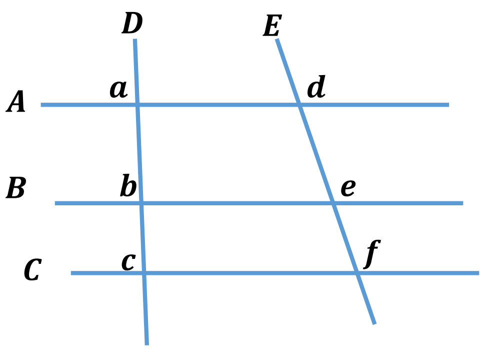
b) $AC^2 = AB^2 + BC^2$ V - F

c) $CD^2 = AC^2 - AD^2$ V - F

d) Si $AC$ =5 cm y $\overline{CD}$= 4 cm $\Rightarrow \overline{AD}$ = 3 cm V - F

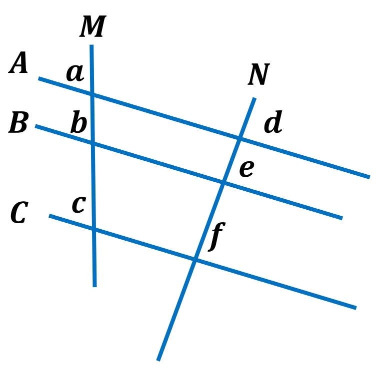
e) $\alpha$ es el complemento de 90° - $\beta$ V - F

V-20 Halla la medida de $\overline{ef}$, para que sea $A//B//C$, si $\overline{ab} = 3cm$; $\overline{bc} = 2cm$ y $\overline{de} = 5cm$.



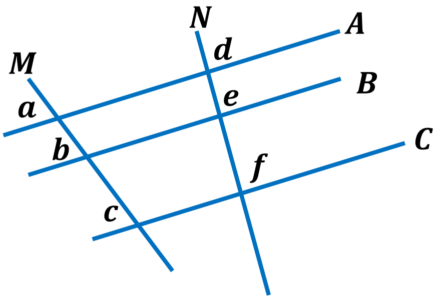

V-21 Halla la longitud de los segmentos desconocidos, en cada caso.

*a)*



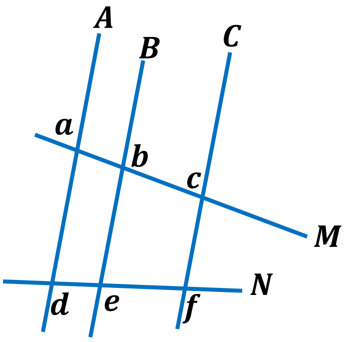

$$\begin{cases} \overline{ab} = 2x \\ \overline{bc} = 5x - 5cm \\ \overline{ef} = 16cm \\ \overline{de} = 8cm \end{cases}$$

*b)*



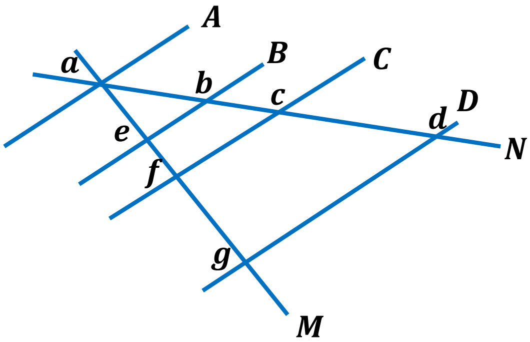

$$\begin{cases} \overline{bc} = 5x - 6cm \\ \overline{df} = 9cm \\ \overline{ac} = 2x + 2cm \\ \overline{ef} = 6cm \end{cases}$$

*c)*




$$\begin{cases} \overline{ab} = 2x - 3cm \\ \overline{de} = 6cm \\ \overline{ef} = 12cm \\ \overline{ac} = 2x + 3cm \end{cases}$$

*d)*




$$\begin{cases} \overline{ab} = 0{,}4x + 3cm \\ \overline{ae} = 5cm \\ \overline{bc} = 3x - 4{,}5cm \\ \overline{cd} = 2x + 3cm \\ \overline{ag} = 18{,}75cm \end{cases}$$

V-22 Subraya la respuesta correcta:

a) En un triángulo acutángulo cualquier altura forma con la base correspondiente un ángulo de:

60°  90°  30°

b) En un triángulo rectángulo la altura correspondiente a uno de los catetos coincide:

con el otro cateto  con la hipotenusa

c) La altura de un triángulo es:

una recta  una semirrecta  un segmento

d) La mediana de un triángulo es:

una recta  una semirrecta  un segmento

e) La mediatriz de un triángulo es:

una recta  una semirrecta  un segmento

V-23 El lado de un rectángulo mide 18 m y su área 144 m$^2$. El lado del cuadrado que tiene el mismo perímetro que el rectángulo mide:

a) 12 m ( )

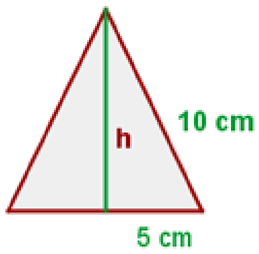
b) aproximadamente 5 m ( )

c) $(\sqrt{13})^2 m$ ( )

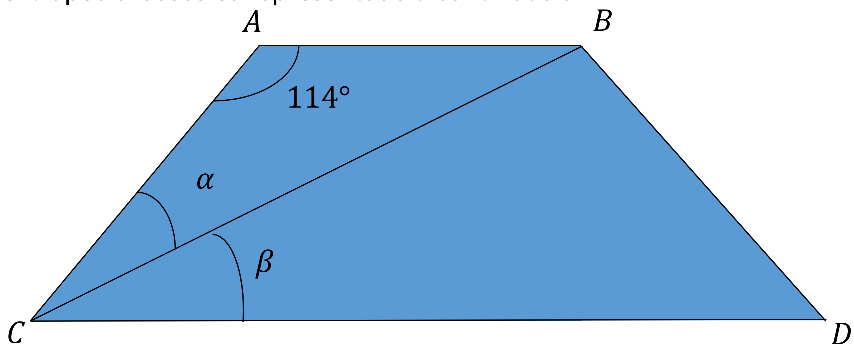
d) 26 m ( )

e) Ninguna de las anteriores ( )

V-24 Halla el perímetro y el área del triángulo equilátero:



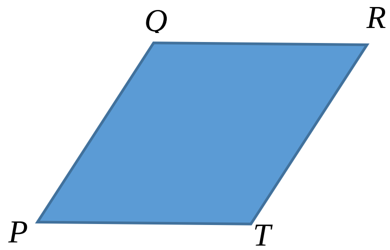

V-25 Sea ABCD el trapecio isósceles representado a continuación:




Sabiendo que la amplitud del ángulo $\alpha$ es la mitad de la amplitud del ángulo $\beta$, entonces se puede asegurar que:

| | | |
|---|---|---|
| a) | $\alpha = 33°$ | |
| b) | $\alpha = 38°$ | |
| c) | $\alpha = 57°$ | |
| d) | $\alpha = 22°$ | |
| e) | Ninguna de las respuestas anteriores es correcta | |

V-26 Si $PQRT$ es un rombo, y se sabe que $\widehat{PQR} = 3x + 60°$ y $\widehat{PTR} = 4x + 30°$. Las siguientes opciones son correctas, excepto:



*a.* Sus diagonales son perpendiculares y bisectrices de los ángulos opuestos. ☐

*b.* La amplitud del ángulo $QPT$ es de 30°. ☐

*c.* El ángulo exterior al ángulo $RTP$ es suplementario al ángulo $QRT$. ☐

*d.* La suma de las amplitudes de los ángulos exteriores de $PQRT$ es 360°. ☐

*e.* Todas las opciones son correctas. ☐

V-27 Halla el área de un hexágono inscrito en una circunferencia de 4 cm de radio.

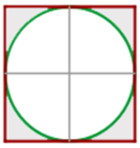
V-28 Un hexágono regular de 48 cm de perímetro, se halla inscripto en una circunferencia. Determina cuánto mide la apotema, la superficie y el lado del hexágono; la longitud de la circunferencia y el área del círculo.

V-29 Halla el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio.

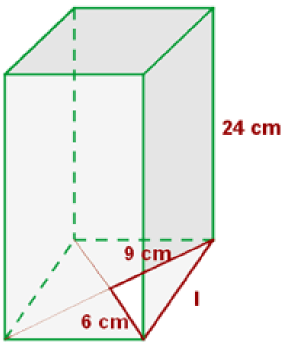
V-30 El perímetro de un trapecio isósceles es de 110 m, las bases miden 40 y 30 m respectivamente. Calcula los lados no paralelos y el área.

V-31 La superficie de una mesa está formada por una parte central cuadrada de 1 m de lado y dos semicírculos adosados en dos lados opuestos. Calcula el área.

V-32 Halla el área sombreada, sabiendo que el lado del cuadrado es 4cm y el radio del círculo mide 2cm.



V-33 Calcula el área lateral, el área total y el volumen de un prisma cuya base es un rombo con diagonales de 12 y 18cm y altura igual al doble de la diagonal menor. Realiza un esquema para orientarte.



V-34 Una lata cilíndrica tiene un volumen de $40\pi$ $cm^3$ y 10 cm. de altura. ¿Cuál es su diámetro?

V-35 El volumen de un cono es $2000\pi$ $cm^3$. Calcula el radio de la base y la altura si son entre sí como 4:3

V-36 Calcula el volumen, en centímetros cúbicos, de una habitación que tiene 5 m de largo, 40 dm de ancho y 2500 mm de alto.

V-37 Una piscina tiene 8 m de largo, 6 m de ancho y 1.5 m de profundidad. Se pinta la piscina a razón de 6 € el metro cuadrado.

a) ¿Cuánto costará pintarla?

b) ¿Cuántos litros de agua serán necesarios para llenarla?

V-38 En un almacén de dimensiones 5 m de largo, 3 m de ancho y 2 m de alto queremos almacenar cajas de dimensiones 10 dm de largo, 6 dm de ancho y 4 dm de alto. ¿Cuántas cajas podremos almacenar?

V-39 Calcula la altura de un prisma que tiene como área de la base 12 $dm^2$ y 48 l de capacidad.

V-40 Calcula la cantidad de hojalata que se necesitará para hacer 10 botes de forma cilíndrica de 10 cm de diámetro y 20 cm de altura.

V-41 Un cilindro tiene por altura la misma longitud que la circunferencia de la base. Y la altura mide 125.66 cm. Calcula:

A) El área total.

B) El volumen.

V-42 En un vaso de precipitación de 6 cm de radio se echan cuatro cubitos de hielo de 4 cm de arista. ¿A qué altura llegará el agua cuando se derritan?

V-43 Un recipiente cilíndrico de 5 cm de radio y 10 cm de altura se llena de agua. Si la masa del recipiente lleno es de 2 Kg, ¿cuál es la masa del recipiente vacío?

V-44 Un cubo de 20 cm de arista está lleno de agua ¿Cabría esta agua en una esfera de 20 cm de radio?

V-45 Una escalera de 10 m de longitud está apoyada sobre la pared. El pie de la escalera dista 6 m de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared?

V-46 Determina el lado de un triángulo equilátero cuyo perímetro es igual al de un cuadrado de 12 cm de lado. ¿Serán iguales sus áreas?

V-47 Calcula el área y el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 30 y 16 cm.

V-48 La diagonal menor de un romboide es de 21 cm y la diagonal mayor es igual a 4/3 de la diagonal menor. Calcula la superficie del romboide.

V-49 Completa el siguiente cuadro, considerando que se trata de polígonos regulares.

| n | nombre | SAI | SAE | VAI | VAE | d | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | | | | | | | |
| | | 1980° | | | | | |
| | | | | 108° | | | |
| | | | | | | | 14 |

Referencias:

- SAI: Suma de las amplitudes de los ángulos interiores.
- SAE: Suma de las amplitudes de los ángulos exteriores.
- VAI: Valor de la amplitud de cada ángulo interior.
- VAE: Valor de la amplitud de cada ángulo exterior.
- d: Diagonales que pueden trazarse desde un vértice.
- D: Diagonales totales que pueden trazarse.

V-50 La razón entre las áreas de dos círculos es 3. La razón entre sus diámetros es:

a) 3 ( )
b) 9 ( )
c) 6 ( )
d) 1,5 ( )
e) Ninguna de las anteriores ( )

V-51 Deseamos comprar una alfombra para una habitación de 3,35 m de ancho por 4,25 m de largo, de manera que quede separada 20 cm de las paredes. La superficie de la alfombra es:

a) 6,80 $m^2$ ( )
b) 11,35 $m^2$ ( )
c) 14,23 $m^2$ ( )
d) 13,60 $m^2$ ( )
e) Ninguna de las anteriores ( )

V-52 Un fabricante de conservas quiere cambiar los envases de lata de puré de tomate por envase tetrabrik de formato cúbico. Si cada envase debe contener 480 $cm^3$ ¿qué largo, que ancho y qué altura tendría el envase?

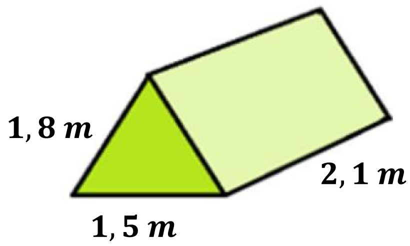
V-53 Un rectángulo mide 40 $m^2$ de superficie y 26 metros de perímetro. Calcula la medida de sus lados.

V-54 Un terreno en forma de trapecio isósceles tiene un perímetro de 28 cm. Si una de sus bases mide 6 cm y la otra base es el doble de esta ¿Cuál es el área del terreno?

V-55 En una bodega se está evaluando incorporar tanques cilíndricos con tapas, de acero inoxidable, para el almacenamiento del vino. Han decidido que estos recipientes tengan una capacidad de 2500 litros. De acuerdo a la disponibilidad de espacio con que cuentan en la bodega, necesitan que la altura de los tanques duplique el diámetro de la base de los mismos.

a. Realiza un diagrama, y consigna los datos en el mismo.
b. ¿Cuáles deben ser las medidas de la altura y el diámetro de los tanques?, para que cumplan con las condiciones requeridas (recuerda que 2500 litros equivalen a $2{,}5m^3$)
c. Si se pretende pintar el exterior completo de los tanques, y se sabe que 1 litro de pintura rinde aproximadamente para $4m^2$; ¿cuántos litros de pintura se necesitan?

V-56 Un grupo de exploradores necesita construir una carpa, para guardar los víveres que llevará a la excursión. Dicha carpa deberá tener la siguiente forma:




a) Con los datos de la imagen, calcule la cantidad de tela que deberán comprar para lograr construir la carpa. Recuerde que las carpas tienen piso.
b) ¿Cuál es el volumen que tendrá la carpa?
c) Para proteger la carpa deben construir una acequia que rodee la base de la misma, ¿cuál es la longitud de esa acequia?

V-57 Una fábrica de dulces está diseñando un envase para sus productos. Se trata de un recipiente de vidrio de forma cilíndrica y con tapa de hojalata, que tiene una capacidad de $483\ cm^3$. Se pretende además que la altura del envase sea el triple del radio de la base.

a) Realice la representación gráfica del frasco, consigne en ella todos los datos e incógnitas.
b) Determine las dimensiones que tendrá el envase.
c) Si se quiere colocar al frasco una etiqueta de papel que abarque completamente la cara lateral del envase, ¿cuál es la superficie que debe tener esa etiqueta?
d) Sabiendo que, por la densidad del dulce, 75 gramos ocupan $82\ cm^3$ ¿Cuántos gramos de dulce contendrá el frasco lleno?

V-58 Se desea pintar el interior de una piscina de 9m de largo, 5m de ancho y 2m de alto. Se sabe que la lata de pintura de 10 litros cubre 8m2 por litro de la misma.

a) Realice la representación gráfica de la pileta, consigne en ella todos los datos e incógnitas.

b) Determine la superficie a pintar

c) ¿Cuántos litros de pintura se utilizarán para pintar la piscina?

d) ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenar completamente la piscina? (Recuerde que 1000 litros de agua equivalen a 1m3 de agua).

# 5.1 RESPUESTAS - GEOMETRIA

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| V-01 | a) Obtuso | b) Agudo | c) Recto | d) Nulo |
| | e) Agudo | f) Nulo | g) Llano | h) Recto |
| V-02 | a) A veces | b) Siempre | c) A veces | d) Siempre |
| | e) Nunca | f) Siempre | g) Nunca | h) A veces |

V-03 a) 69°23’ b) 124°7’ c) 36°11’ d) 167°15’

V-04 a) 271º15’54’’ b) 15°14’17’’ c) 182°22’ d) 82°25’18,5’’

V-05 a) $\delta$ = 60° $\gamma$ = 30° b) 80º

V-06 a) $\alpha = \gamma$ = 91° b) $\alpha = \gamma$ = 100° c) $\alpha = \delta$ =135° d) $\alpha = \delta$ =93° 40’

$\beta = \delta$ =89º $\beta = \delta$ =80° $\gamma = \beta$ =45° $\gamma = \beta$ = 86º 20’

V-07 a) $AOB = BOC = 72°$ b) $AOB = 100°$ $BOC = 80°$

V-08 $x = 100°$

V-09 30°, 60° y 90°

V-10 $x = 84°$

V-11 54,4 mm y 108,5 mm

V-12 a) $A = C = 60°$ $D = B = 120°$

b) $D = B = 79°$ $A = C = 101°$

c) $A = C = 64°$ $B = D = 116°$

V-13 $ADC = 110°$

V-14 a) Paralelogramo, rectángulo, rombo, cuadrado.

b) Rectángulo, cuadrado.

c) Rectángulo, cuadrado.

d) Cuadrado, rombo.

e) Rombo, cuadrado.

f) Rectángulo, cuadrado, rombo, paralelogramo.

g) Cuadrado.

V-15 a) F b) V c) V

V-16 hipotenusa: 12,24 cm

V-17 c)

V-18 D=$\sqrt{50}$, P=20cm, A=25cm$^2$

V-19 a) P = (24+$\sqrt{40}$) cm, A = 54cm$^2$ b) 120°, 60°, 130° c) V, F, V, V, V

V-20 $\overline{ef} = 3{,}33\ cm$

V-21 a) $\overline{ab} = 10cm$ $\overline{bc} = 20cm$
b) $\overline{bc} = 4cm$ $\overline{ac} = 6cm$
c) $\overline{ab} = 3cm$ $\overline{ac} = 9cm$
c) $\overline{ab} = 4cm$ $\overline{bc} = 3cm$ $\overline{cd} = 8cm$

V-22 a) 90º b) el otro cateto c) segmento d) segmento e) una recta

V-23 c)

V-24 P=30cm, A=$25\sqrt{3}$cm$^2$

V-25 Opción d)

V-26 Opción c)

V-27 A=41,56 cm$^2$

V-28 lado = 8cm; apotema = 6,93cm; S = 166,32cm $^2$; $L_{circunf.}$ = 50,26cm y $A_{círculo}$ = 200,96cm $^2$.

V-29 A=50cm$^2$

V-30 Lados no paralelos: 20m A = 677,77m$^2$

V-31 A ≅1,79m$^2$

V-32 A= 3,43cm$^2$

V-33 $A_{lateral}$ =1038,39cm$^2$, $A_{Total}$ = 1254,39cm$^2$, V = 2592cm$^3$

V-34 D = 4 cm.

V-35 r = 20 cm h = 15 cm

V-36 V=50.000.000 cm$^3$

V-37 a) € 540 b) 72000 litros

V-38 125 cajas

V-39 Altura = 4dm

V-40 A=7853,98cm$^2$

V-41 A=18304,18cm$^2$, V=157909,01cm$^3$

V-42 Altura= 2,26cm

V-43 masa = 1,21kg

V-44 Si

V-45 8m

V-46 16cm, no

V-47 240cm$^2$, 68cm

V-48 S= 294 cm$^2$

V-49

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | Octógono | 1080° | 360° | 135° | 45° | 5 | 20 |
| 13 | Tridecágono | 1980° | 360° | 152°18’28’’ | 27°41’32’’ | 10 | 65 |
| 5 | Pentágono | 540° | 360° | 108° | 72° | 2 | 5 |
| 7 | heptágono | 900° | 360° | 128°34’17’’ | 51°25’43’’ | 4 | 14 |

V-50 Ninguna de las anteriores

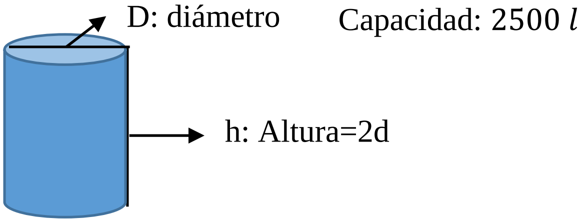
V-51 b)

V-52 largo = ancho = altura = 7,83 cm

V-53 Si x = 8 m $\Rightarrow$ y = 5m Si x = 5 m $\Rightarrow$ y = 8m

V-54 A = 36 cm$^2$

V-55 a)




b) El tanque debe tener 1,16 m de diámetro y 2,32 m de altura.

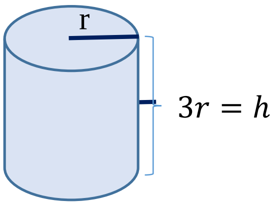
c) Se necesitan 2,38 litros de pintura.

V-56 a) Se necesitarán 13,16$m^2$.

b) El volumen será de 2,58$m^3$.

c) La longitud de la acequia será de 7,2$m$.

V-57 a)

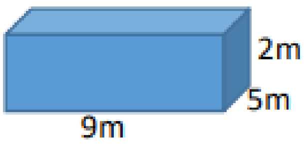



b) El radio mide 3,71cm y la altura 11,14cm.

c) Respuesta: La superficie de la etiqueta es 259.44$cm^2$.

d) Respuesta: el frasco contendrá 441,76 gramos.

V-58 a)




b) La superficie a pintar es de 101 $m^2$.

c) Se necesitan 126,25 litros de pintura.

d) Se necesitan 90000 litros para llenar la pileta.

# 6. TRIGONOMETRÍA

VI-01 Expresa en radianes la medida de cada ángulo (registrar hasta la quinta cifra decimal)

| | | |
|---|---|---|
| *a.* $\hat{\alpha} = 45º$ | *d.* $\hat{\varepsilon} = 135º30'23"$ | *g.* $\hat{\mu} = 110º57"$ |
| *b.* $\hat{\beta} = 120º$ | *e.* $\hat{\varphi} = 114º35'30"$ | *h.* $\hat{\rho} = 57º17'45"$ |
| *c.* $\hat{\delta} = -90º$ | *f.* $\hat{\phi} = -43º21'34"$ | *i.* $\hat{\theta} = 34'48"$ |

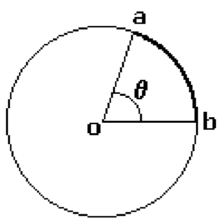
VI-02 Expresa en grados, minutos y segundos sexagesimales la medida de cada ángulo.

| | | |
|---|---|---|
| *a.* $\hat{\alpha} = \pi$ | *d.* $\hat{\varepsilon} = 2\pi$ | *g.* $\hat{\mu} = \frac{\pi}{9}$ |
| *b.*$\hat{\beta} = \frac{2\pi}{3}$ | *e.* $\hat{\varphi} = \frac{11\pi}{6}$ | *h.* $\hat{\rho} = -\frac{7\pi}{2}$ |
| *c.* $\hat{\delta} = 2$ | *f.* $\hat{\phi} = 0$ | *i.* $\hat{\theta} = -4{,}725$ |

Antes de abordar los siguientes ejercicios debes revisar los conceptos de *circunferencia*, *círculo*, *arco*, *sector circular*, *ángulo central*, como así también las fórmulas que permiten calcular *longitudes*, *áreas* y amplitudes.

VI-03 Halla la longitud de un arco que corresponde a un ángulo de 70° en un círculo de 15 cm de diámetro.

Siguiendo los pasos presentados en el instructivo, se propone comenzar con la lectura del enunciado de modo que se identifiquen datos e incógnitas. Se pide hallar la “longitud de un arco de circunferencia”, es decir, calcularla a partir de datos (cantidades conocidas) mediante el uso de fórmulas apropiadas. Los datos son el *diámetro del círculo* y la *amplitud de un ángulo* que abarca esa longitud de arco, llamado *ángulo central.* Podemos representar el problema mediante el siguiente gráfico.




Se busca calcular la longitud del arco remarcado en la figura, el arco ab, que corresponde al ángulo central $\hat{\theta}$.

Recordemos que la medida del arco es directamente proporcional a la medida del radio de la circunferencia

$$med\ arco \propto med\ radio$$

(la abreviatura *med* significa “medida”) y la constante de proporcionalidad es la amplitud del ángulo central *¡¡expresada en radianes!!*. De modo que resulta:

$$med\ arco = \theta \times med\ radio$$

Así, la medida que buscamos es:

$$med\ arco = \frac{7}{18}\pi \times 7{,}5 \quad = \quad \frac{525}{180}\pi \quad \approx \quad 9{,}1629$$

Entonces, la longitud del arco en cuestión es, aproximadamente: **9,1629 cm**.

VI-04 Halla el área de un sector circular que queda determinado por un ángulo de 112º en un círculo de 36cm de diámetro.

VI-05 ¿Cuál será el diámetro de un círculo en el que un ángulo de 3,2 radianes determina un sector de 5,6m$^2$?

VI-06 Un arco de 86 cm subtiende el ángulo $\hat{\alpha}$ en una circunferencia de 6 metros de diámetro. Halla la amplitud del ángulo en grados, minutos y segundos.

VI-07 Un ángulo central $\hat{\alpha}$ está subtendido por un arco de 2 metros en un círculo de 10 metros de diámetro.

a. Encuentra la medida de $\hat{\alpha}$ en radianes.
b. Encuentra la medida de $\hat{\alpha}$ en grados, minutos y segundos.
c. Establece el área del sector circular determinado por$\hat{\alpha}$.

VI-08 La ciudad de Mendoza está situada aproximadamente en el mismo meridiano que la ciudad de La Paz (Bolivia). La latitud de Mendoza es de 32,92° S y la de La Paz es de 16,5°S. Encuentra la distancia entre las dos ciudades (El radio de la Tierra es 6378km aproximadamente)

VI-09 Determina el valor de las funciones trigonométricas (registra hasta el quinto decimal)

| | | |
|---|---|---|
| a. $sen(45°)$ | d. $cos(1{,}5\pi)$ | g. $tg(\pi/20)$ |
| b. $tg(38°15'55'')$ | e. $cosec(23°12')$ | h. $sec(\pi)$ |
| c. $sen(1{,}23)$ | f. $cotg(0)$ | i. $cosec\ (1{,}3)$ |

¡**<u>RECUERDA</u>**! : Para trabajar en el sistema de medición **sexagesimal**, revisa que tu calculadora esté en el modo **"DEG"**. Si trabajas en el sistema de medición **radial**, el modo debe ser **"RAD"**.
En la mayoría de las calculadoras científicas, la tecla **"MODE"** te permite cambiar el modo de trabajo.

Ejemplo:

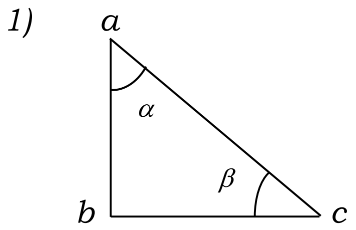
MODE → 4

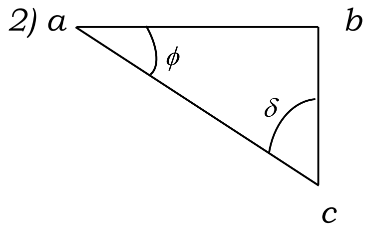
DEG

Es decir, ahora estamos en el modo de trabajo del sistema sexagesimal.

Hecha esta aclaración, ¡***comienza el ejercicio!***

VI-10 Dados los siguientes triángulos, halla con regla la longitud de cada lado de los mismos. A partir de estos valores, determina las razones trigonométricas de los ángulos agudos. Verifica con calculadora.




VI-11 Marca la opción correcta. Si $cos(\alpha) = 0{,}5$ entonces:

a. $\hat{\alpha}$= 2π/3 ( )

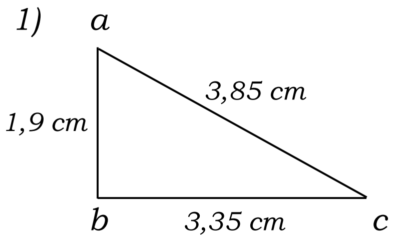
b. $\hat{\alpha}$= 60° ( )

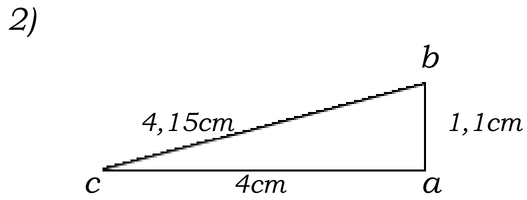
c. $\hat{\alpha}$= 3π/2 ( )

d. $\hat{\alpha}$= 30° ( )

e. Ninguna de las anteriores es verdadera ( )

VI-12 Dados los siguientes triángulos, halla las razones trigonométricas y la amplitud de los ángulos agudos a partir de la longitud de los lados.




VI-13 En cada caso calcula el valor del ángulo en grados, minutos y segundos (considera sólo ángulos del primer cuadrante)

a. sen($\hat{\phi}$) = 0,95

b. cos($\hat{\phi}$) = 0,01

c. cosec($\hat{\phi}$) = 1,01

d. cotg($\hat{\phi}$) = 0,52

e. tg($\hat{\phi}$) = 4,23

f. sec($\hat{\phi}$) = 3,16

g. cosec($\hat{\phi}$) = 10,19

h. cotg($\hat{\phi}$) = 0,83

VI-14 En cada caso calcular el valor del ángulo (menor que π) en radianes (registrar hasta la milésima)

a. cos($\hat{\phi}$) = 0,95

b. tg($\hat{\phi}$) = 1,5419

c. sen($\hat{\phi}$) =0,01

d. sec($\hat{\phi}$) = 2,23

e. cosec($\hat{\phi}$) = 5,19

f. cotg($\hat{\phi}$) = 1,49

g. sec($\hat{\phi}$) = 4,81

h. sec($\hat{\phi}$) = -1,98

VI-15 Consigna con una cruz en cada caso, el cuadrante al que pertenece el ángulo.

| | **1º cuadrante** | **2º cuadrante** | **3º cuadrante** | **4º cuadrante** |
|---|---|---|---|---|
| $sen(\hat{\beta}) > 0 \; y \; cos(\hat{\beta}) < 0$ | | | | |
| $sen(\hat{\beta}) < 0 \; y \; tg(\hat{\beta}) < 0$ | | | | |
| $tg(\hat{\beta}) > 0 \; y \; cos(\hat{\beta}) < 0$ | | | | |
| $\mathrm{cotg}(\hat{\beta}) < 0 \; y \; sen(\hat{\beta}) > 0$ | | | | |
| $cosc(\hat{\beta}) > 0 \; y \; tg(\hat{\beta}) > 0$ | | | | |
| $sec(\hat{\beta}) > 0 \; y \; cot\,g\,(\hat{\beta}) < 0$ | | | | |

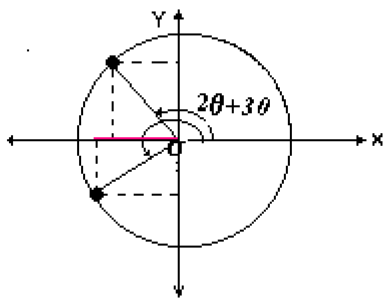
VI-16 Marca la opción correcta. Si cos($\hat{\phi}$) > 0 y tg($\hat{\phi}$) < 0, entonces:

a. $0 < \hat{\phi} < \pi/2$ ( )
b. $\pi/2 < \hat{\phi} < \pi$ ( )
c. $\pi < \hat{\phi} < 3\pi/2$ ( )
d. $3\pi/2 < \hat{\phi} < 2\pi$ ( )
e. Ninguna de las anteriores es verdadera. ( )

VI-17 Marcar la opción correcta. Si cos(2$\hat{\theta}$+30°) < 0, entonces

a. $\hat{\theta} > 30°$ ( )
b. $2\hat{\theta}+30° < 0$ ( )
c. $30° < \hat{\theta} < 120°$ ( )
d. $90° < \hat{\theta} < 270°$ ( )
e. Ninguna de las anteriores es verdadera. ( )

*Solución:* Considerando que **2$\hat{\theta}$ +30°** es el *argumento* del coseno, y éste debe ser negativo, hagamos un gráfico que responda a esta situación.



Observa que cos($2\hat{\theta}$+30°) < 0, si $2\hat{\theta}$ +30° pertenece al segundo o al tercer cuadrante.

Entonces: ______ < $2\hat{\theta}+30°$ < ______

______ < $2\hat{\theta}$ < ______

______ < $\hat{\theta}$ < ______

Ahora sí, procede a marcar la opción correcta.

VI-18 Halla las amplitudes angulares entre las que se encuentra el ángulo $\hat{\theta}$ en cada caso.

*a.* sen ($3\hat{\theta}$+30°) < 0

*b.* cos ($5\hat{\theta}$- 45°) < 0

*c.* tg ($2\hat{\theta}$- 20°) > 0

VI-19 Calcula la medida de todos los ángulos positivos y menores que un giro correspondiente a cada caso.

a) cos($\hat{\alpha}$) = 0,5

b) sen($\hat{\alpha}$) = 0,79843

c) sec($\hat{\alpha}$) = 1,78564

d) $\hat{\alpha}$ = arcsen (– 0,5)

e) $\hat{\alpha}$ = arcos(– 0,86605)

f) $\hat{\alpha}$ = $tg^{-1}$(3,67854)

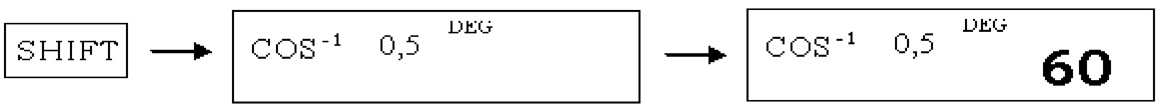
g) $\hat{\alpha}$ = $cosec^{-1}$(3,21004)

h) $\hat{\alpha}$ = $cotg^{-1}$(2,14687)

<u>Solución</u>

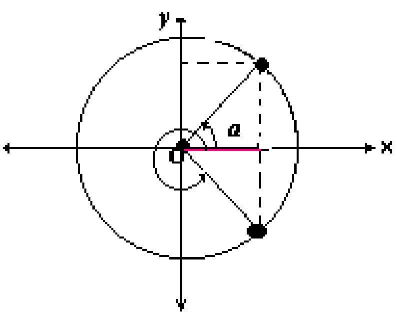
Resolveremos, el inciso a) juntos.

Si tienes a mano una calculadora científica, podrás utilizarla para calcular $\alpha$. Te sugerimos un procedimiento (útil para la mayoría de las calculadoras científicas). **Primero observa el MODO en que está la calculadora**. Si es DEG (sistema sexagesimal), en el display de la calculadora verás:




¡Bien! Ya sabemos que $\hat{\alpha}$ **= 60°**, pero, ¿estás seguro que es el único valor posible de $\hat{\alpha}$ para la respuesta?

Observa la siguiente circunferencia trigonométrica:



Claramente, hay **dos** valores posibles para $\hat{\alpha}$, ya que la condición **ángulos positivos y menores que un giro** así me lo indica.

¿Cómo averiguarías el valor del ángulo que falta, mirando la gráfica anterior?

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

***Escribe el camino que seguiste para obtener el resultado***

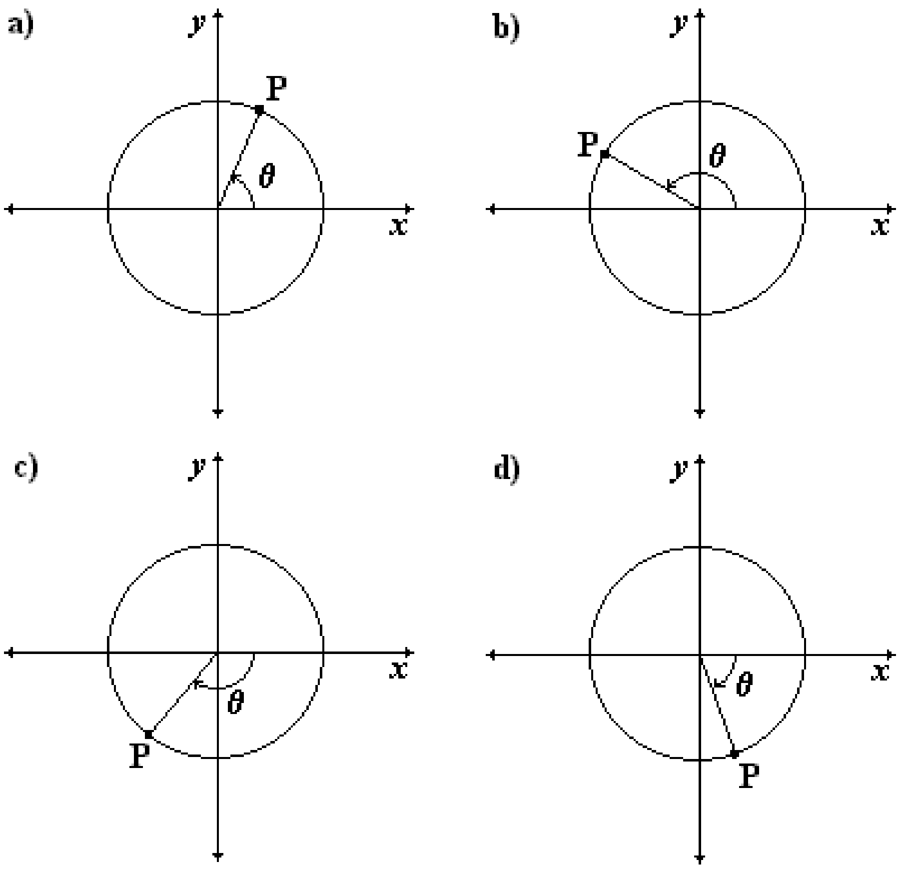
VI-20 Dado el ángulo $\hat{\theta}$ en el círculo trigonométrico unitario, calcula en cada caso las coordenadas del punto P, sabiendo que:

a) $\hat{\theta}$ = 74° 20’

b) $\hat{\theta}$ = 143° 12’ 34”

c) $\hat{\theta}$ = – 130° 20’ 28”

d) $\hat{\theta}$ = – 80° 12’ 16”.



VI-21 A continuación se dan las coordenadas de un punto P sobre la circunferencia trigonométrica. En cada uno de los casos calcula la amplitud del ángulo positivo $\hat{\theta}$.

| | |
|---|---|
| a) P(3/5 ; 4/5) | d) P(–12/13 ; –5/13) |
| b) P(–8/17 ; 15/17) | e) P(7/25 ; –24/25) |
| c) P(0 ; –1) | f) P(–1 ; 0) |

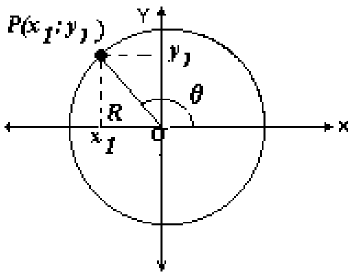
*Solución*

Haremos juntos el inciso b). Para ello, comenzaremos realizando el gráfico correspondiente. Antes de ello, de los datos surge que:

$x_1$ = -8/17 _ _ _ _ _ 0 y que $y_1$ = 15/17 _ _ _ _ _ 0

(Completa < ó >) (Completa < ó >)

De manera que el gráfico luce así:




Como $x_1 = \cos(\hat{\theta})$, entonces: $\hat{\theta} = \cos^{-1}(x_1)$

¿Qué es la función $\cos^{-1}(x)$ y cómo se lee?

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

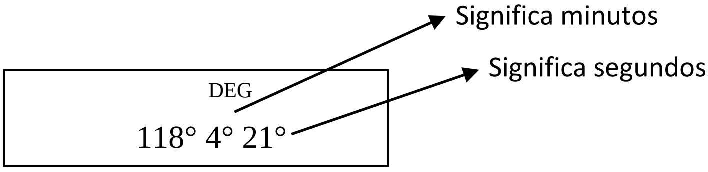
Usando tu calculadora en modo **“DEG”**,

SHIFT → $COS^{-1}$ -8/17 DEG → $COS^{-1}$ -8/17 DEG **118,07248**

¿Cómo hago para expresar el resultado en grados, minutos y segundos? Es fácil. Simplemente aprieta la tecla:

o ’ ’’

El resultado, en muchas calculadoras científicas se muestra así:



Verifiquemos la coherencia de tu resultado con el ejercicio, ¿ $\theta$ pertenece al segundo cuadrante?

**NOTA:** La anterior NO ES la única manera de encontrar $\hat{\theta}$ ¿De qué otra manera podrías hallarlo utilizando el valor de $\mathbf{y_1}$?

VI-22 Dadas las coordenadas de los puntos, indica cuáles pertenecen al círculo trigonométrico, cuáles a la circunferencia y cuáles a ninguno (redondea a 3 decimales). <u>En cada uno de los casos, justifica tu respuesta</u>.

A(–1;0) B(0,66666 ; 0,74536) C(– 0,33333 ; 0,33333)

D(0,4 ; – 0,52) E(0,8 ; 0,6) F(0 ; –1)

G(0,3 ; 0,95394) H(0 ; 0) I(0,15 ; 0,15)

J(0,3 ; –0,9) K(1 ; 1) L(0,65 ; 0,43)

M(0,85 ; 0,91) N(– 0,7 ; –0,7) Ñ(0,71 ; 0,71)

VI-23 A partir de la información dada, determina los valores de las restantes funciones trigonométricas del ángulo $\hat{\theta}$.

a) $sen(\hat{\theta}) = \frac{3}{5}$ ; $\hat{\theta}$ *en el II cuadrante.*
b) $sen(\hat{\theta}) = -\frac{4}{5}$ ; $cos(\hat{\theta}) = \frac{3}{5}$
c) $cos\,e\,c(t) = \frac{\sqrt{13}}{2}$ ; $cot\,g\,(t) = -\frac{3}{2}$
d) $sec(\hat{\theta}) = 3$ ; $\hat{\theta}$ *en el IV cuadrante.*
e) $cos\,e\,c(\hat{\theta}) = \frac{5}{2}$ ; $cos(\hat{\theta}) < 0$
f) $sen(\hat{\theta}) = 0{,}98576$ ; $cos(\hat{\theta}) > 0$

VI-24 Si $\cos(2\hat{\theta} + 30°) < 0$, entonces

| | |
|---|---|
| a) $\hat{\theta} > 30°$ | |
| b) $2\hat{\theta} + 30° < 0°$ | |
| c) $30° < \hat{\theta} < 120°$ | |
| d) $90° < \hat{\theta} < 270°$ | |
| e) Niguna de las respuestas anteriores es correcta | |

VI-25 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas. Considera valores de *x* menores que un giro.

a) $3\cos^2 x = sen^2 x$
b) $sen\,x - 2 = -\,cosec\,x$

c) $sen^2 x - sen\, x = cos^2 x$

d) $27\, cos^2 x - 18 = 10\, sen\, x$

e) $sen(x)\ \ cot\, g\,(x) + cos(\,x) = \frac{2}{sec(x)} - sen(x) + 1$

f) $5 - 4\ sen^2 x = cosec^2 x$

*Solución*

De acuerdo a lo hecho en ejercicios anteriores, resolveremos juntos el ítem d)

$$27\, cos^2 x - 18 = 10\, sen\, x$$

Como vemos, se trata de una ecuación en donde aparecen involucrados el seno y el coseno del ángulo "x". Es necesario, en estos casos, expresar la ecuación en términos de sólo una función trigonométrica (*sen(x)* o *cos(x)*)

En este caso, elegimos reemplazar: $cos^2 x = 1 – sen^2 x$. En la igualdad anterior, y nos queda:

$$27\,(1 – sen^2 x) - 18 = 10\, sen\, x$$

Aplicando propiedad distributiva y luego igualando a cero la expresión, obtenemos:

$$-27\, sen^2 x - 10\, sen\, x + 9 = 0$$

Esta expresión se ***asemeja*** a una ecuación de segundo grado. Si hacemos el siguiente reemplazo:

$t = sen\, x$ la ecuación queda:

$$-27\ t^2 - 10\, t + 9 = 0$$

Resolviendo la ecuación, obtenemos las siguientes raíces:

$t_1 = -0{,}79$

$t_2 = 0{,}42$

(Hemos truncado ambos resultados a partir de la 3ra. cifra decimal)

De acuerdo al reemplazo anterior $t = sen\, x$, entonces podemos escribir:

$-0{,}79 = sen(x)$ (1)

$0{,}49 = sen(x)$ (2)

Teniendo presente la ecuación (1):

$-0{,}79 = sen(x)$, entonces: $x = sen^{-1}(-0{,}79)$.

(¿Cómo lo calcularías en la máquina?)

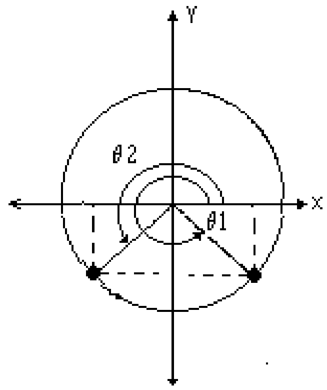
El resultado que se muestra en el display es:

| |
|---|
| DEG<br>-52,18551149 |

Es decir: -52º 11’ 7’’, que es un ángulo medido en *el sentido horario (-)*

Para obtener un ángulo medido en *el sentido antihorario* hacemos:

$$360° - 52° 11' 7'' = 307° 48' 51'' = \theta_1$$




Observando el gráfico anterior, podemos calcular fácilmente **$\theta_2$ = 232° 11’ 8’’**

Utilizando un procedimiento similar con la ecuación (2), ¿cómo calcularías las restantes soluciones? ***(Una ayuda: faltan averiguar dos más)***

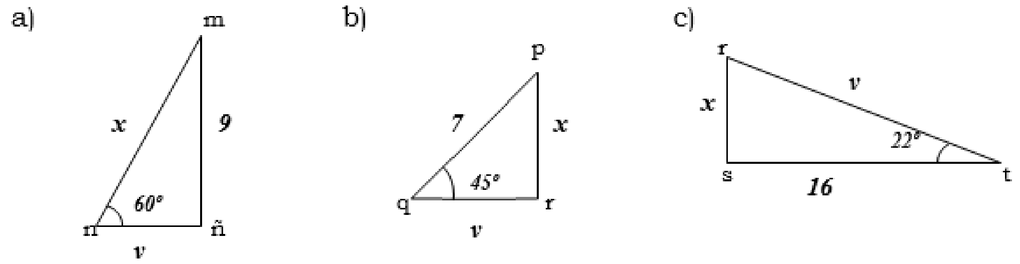
VI-26 Si $10sen^2(\beta) - 5 = 5\cos(\beta)$, entonces

| | |
|---|---|
| a) $\beta_1 = 51°15'38'', \quad \beta_2 = 128°44'21'', \quad \beta_3 = 308°44'21'', \quad \beta_4 = 231°15'39''$ | |
| b) $\beta_1 = 60°, \quad \beta_2 = 180°, \quad \beta_3 = 300°, \beta_4 = 360°$ | |
| c) $\beta_1 = \frac{1}{3}\pi, \quad \beta_2 = \pi, \quad \beta_3 = \frac{5}{3}\pi$ | |
| d) $\beta_1 = 0{,}5, \quad \beta_2 = -1,$ | |
| e) Niguna de las respuestas anteriores es correcta | |

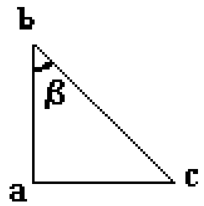
VI-27 Si $\hat{\theta}$ es un ángulo del III cuadrante del cual se conoce que el $sen\,\hat{\theta} = -1/3$. Calcula el valor de las restantes funciones trigonométricas de dicho ángulo (sin calcular previamente el valor de $\hat{\theta}$).

VI-28 Si $\hat{\theta}$es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo y si el lado adyacente y la hipotenusa miden, respectivamente, 4 y 7, halla los valores de todas las funciones trigonométricas del ángulo $\hat{\theta}$.

VI-29 Para cada uno de los triángulos calcule los valores de $x$ e $v$.




VI-30 En el triángulo rectángulo de la figura, el cateto **ab** mide 5m y $cos(\hat{\beta}) = 0{,}4$. Entonces la hipotenusa mide:




a) 5,5m ( )

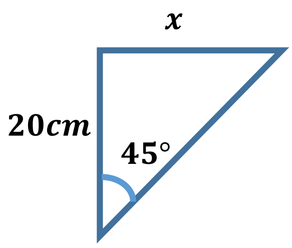
b) 9,5m ( )

c) 11,5m ( )

d) 12,5m ( )

e) 13,5m ( )

VI-31 En el triángulo rectángulo de la figura, el valor de "x" es:




a) 30 cm ( )

b) 100 cm ( )

c) 20 cm ( )

d) 10 cm ( )

e) Ninguna de las anteriores ( )

VI-32 En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 5cm y uno de sus catetos la mitad de ésta. Calcula la amplitud de sus ángulos.

VI-33 Determina la altura de un triángulo equilátero de lado L.

**<u>RECOMENDACIÓN:</u>** revisa los conceptos referentes a *triángulos*: elementos, clasificación, fórmulas... ¿y el teorema de Pitágoras?

Encaremos el problema.

Recordemos que la *altura* de un triángulo es un segmento que se traza desde uno de sus vértices hasta el lado opuesto (o su prolongación) y es perpendicular a éste. Así podemos trazar, en cualquier triángulo, **tres alturas**. En el caso de triángulos *acutángulos* o *rectángulos* las alturas están incluidas en el triángulo en cambio, si se trata de triángulos *obtusángulos* una de las alturas está incluida en el triángulo pero no las otras dos. Por otro lado, no es necesario que las tres alturas de un triángulo sean iguales. Eso dependerá del tipo de triángulo: para uno *escaleno* las tres alturas son diferentes, para uno *isósceles* dos de las alturas son iguales.

¿Cómo es un triángulo *equilátero*? ¿Cómo son sus alturas?

La incógnita en el problema es: ______________________________________________

¿Qué datos relevantes identificas en el problema?

Dibuja un triángulo equilátero y coloca nombre a sus elementos.

Consideremos sólo una de las alturas.

Al hacerlo ¿cuántos triángulos quedan formados?

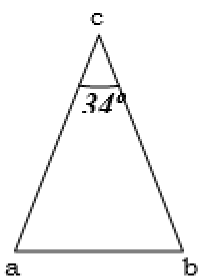
¿Qué características tienen esos triángulos?

¿Ves alguna relación entre los lados de los nuevos triángulos y la incógnita del problema?

¿Puedes escribirla a continuación? ___________________________________________

Si expresas las medidas de los lados de los nuevos triángulos en términos de los lados del triángulo que dibujaste más arriba, encontrarás la solución. Hazlo, sin olvidar cuál es la longitud que nos interesa calcular en este problema.

VI-34 Determina la longitud de los lados del siguiente triángulo isósceles, sabiendo que la altura del lado ab es de 13cm.



VI-35 En el triángulo rectángulo de la figura, el cateto pq mide 4cm y $tg(\hat{\alpha}) = 1{,}38$. Entonces el otro cateto mide:

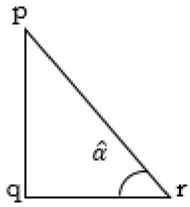
a) 5,52cm ( )

b) 0,345cm ( )

c) 4cm ( )

d) 2,90cm ( )

e) Ninguna de las anteriores ( )




VI-36 Una rampa lisa de 20 m forma un ángulo de 30° con el plano horizontal. Una persona que sube esta rampa totalmente se eleva sobre el suelo:

a) 17 m ( )

b) 10 m ( )

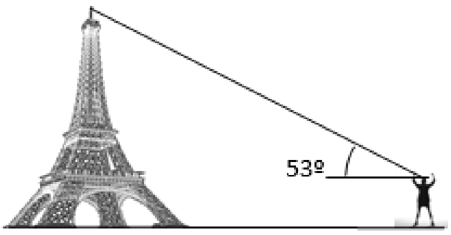
c) 15 m ( )

d) 5 m ( )

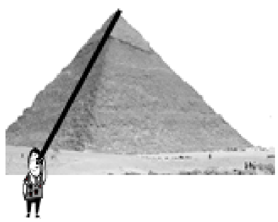
e) Ninguna de las anteriores ( )

VI-37 En el momento en que el ángulo de elevación del sol es de 50° (medido desde el horizonte), la longitud de la sombra de un árbol es de 25m. ¿Cuál es la altura del árbol?

VI-38 Cuando se observa la parte más alta de la torre Eiffel desde una distancia de 243m desde su base, el ángulo de elevación es de 53°. Calcula la altura de la torre (considera la altura de la persona que realiza la medición en 1,81 m)

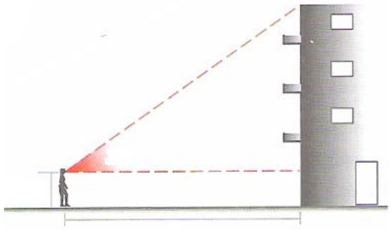



VI-39 La Gran Pirámide de Egipto mide 147 m de altura, y tiene una base cuadrada de 230 m de lado. Calcula el ángulo φ que se forma cuando un observador, situado en el punto medio de uno de los lados de la base, observa la cúspide de la pirámide



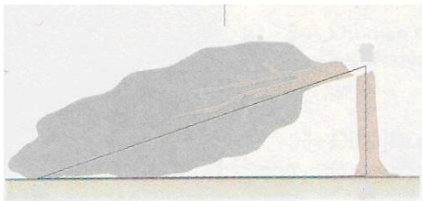
VI-40 Para una nueva carretera debe excavarse un túnel bajo una montaña que mide 260m de altura. A uno de los lados, a una distancia de 200m de la base de la montaña, el ángulo de elevación es de 36°. Por el otro lado de la montaña, a una distancia de 150m, el ángulo de elevación es de 47°. Calcula la longitud del túnel a excavar.

VI-41 Una persona de 1,75m de altura está parada a 120 m de distancia de un edificio. Desde allí observa el extremo superior de la construcción con un ángulo de elevación de 42º. Calcula la altura del edificio.



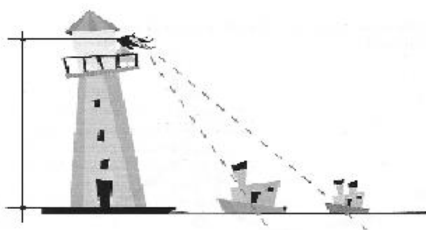
VI-42 Un barco se encuentra frente a un acantilado de 954 m de altura sobre el nivel del mar. Al dirigir la visual desde la proa a la cumbre del acantilado se obtiene un ángulo de elevación de 25º 30' Calcula la distancia del barco a la orilla del acantilado.

VI-43 Un árbol quebrado por el viento forma un triángulo rectángulo con el suelo. Si la parte quebrada forma un ángulo de $50°$ con el suelo y si la copa del árbol está ahora a 6m de su base ¿Qué altura tenía el árbol?



VI-44 ¿Cuál es el perímetro de un triángulo isósceles de 40cm de base y cuyos ángulos de base son de $70°$?

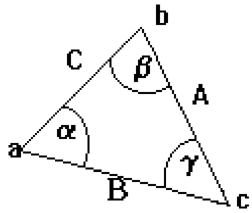
VI-45 Desde un faro de 20m de altura, una persona avista dos barcos. A uno de ellos, lo observa con un ángulo de depresión de $30°$ y al otro con un ángulo de depresión de $15°$. Calcula la distancia que hay entre los barcos.



VI-46 Desde lo alto de un árbol, se tensan dos cables y se atan al piso. Si los cables forman con el suelo ángulos de $41°$ y $55°$ respectivamente y el cable más corto mide 16,6m; calcula:

a) La altura del árbol.
b) La longitud del cable más largo.
c) La distancia a nivel del piso entre ambos cables.

VI-47 En el triángulo oblicuángulo de la figura se verifica:




a) $\alpha = \beta + \gamma$ ( )

b) $A = B + C$ ( )

c) $sen^2 \alpha - cos^2 \alpha = 1$ ( )

d) $A \, sen \, \beta = B \, sen \, \alpha$ ( )

e) Ninguna de las anteriores ( )

VI-48 En un triángulo, el lado A mide 20m, el C 10m y el ángulo comprendido entre ambos tiene una amplitud de $60°$. El lado B mide:

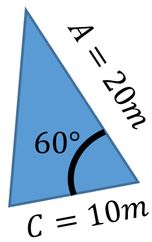
a) 45m ( )

b) 24,5m ( )

c) 17,32m ( )

d) 30m ( )

e) 20m ( )




VI-49 Un guardabosque ubicado en un punto de observación A, avista un incendio en dirección $N27°10'E$. Otro guardabosque que está en un punto de observación B, a 6 Km. directamente al Este de A, advierte el mismo incendio en dirección $N52°40'O$. Calcula la distancia desde cada uno de los puntos de observación hasta el incendio.

VI-50 Un agrimensor observa que la dirección del punto A al B es S63°O y la dirección de A a C es S38°O. La distancia de A a B es 239 metros y la de B a C, de 374 metros. Calcula la distancia de A a C.

VI-51 Un rombo tiene lados de 100 cm de longitud y el ángulo en uno de los vértices es de 70°. Calcula las longitudes de las diagonales.

VI-52 Un terreno triangular tiene lados de 420 m, 350 m y 180 m de longitud. ¿Cuánto vale el ángulo más pequeño entre los lados?

VI-53 Cuando se VI-observa la cima de un rascacielos desde la terraza de un edificio de 15,5 m, el ángulo de elevación es de 59°; cuando se observa el mismo punto desde la calle, al pie del edificio pequeño, el ángulo de elevación es de 62°.

a) Aproximadamente ¿a qué distancia están el edificio y el rascacielos?

b) ¿Cuál es la altura del rascacielos?

VI-54 ¿Cuál es la altura de una torre sabiendo que su sombra mide 15 m cuando los rayos del sol forman un ángulo de $50°$ con el suelo?

VI-55 Calcula la medida de la diagonal mayor de un paralelogramo cuyos lados miden 4 y 6, sabiendo que sus ángulos interiores miden $30°$ y $150°$.

VI-56 Un topógrafo pretende medir la distancia entre dos puntos A y B situados en márgenes opuestas de un río que él no puede cruzar. Para ello elige un punto C, situado en la margen donde se encuentra y mide los ángulos ACB y CAB, encontrando, respectivamente, 45º y 60º. Determina la distancia entre los puntos A y B, sabiendo que hay 16m entre A y C.

Basándote en el enunciado del problema reconoce cuáles son:

las incógnitas:_______________________________________________

y los datos:__________________________________________________

La siguiente cuestión es importante. Piensa: ¿el topógrafo se halla en el lado del punto “A” o del punto “B”? Da una justificación a tu respuesta.

Un gráfico ayuda mucho al entendimiento, sobre todo en este tipo de problemas geométricos. Tus observaciones y el texto del problema te permiten hacer un bosquejo de la situación. Realízalo indicando claramente datos e incógnitas.

¿Cuánto miden los ángulos interiores del triángulo ABC?___________________

¿Qué clase de triángulo es?________________________________________

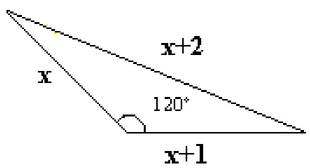
Tú conoces teoremas (o leyes matemáticas) que relacionan las medidas de los ángulos y los lados de un triángulo. De todas ellas, ¿cuál te parece la más apropiada para resolver este caso?

Relaciona, mediante ecuaciones, las medidas de los ángulos y los lados del triángulo ABC.

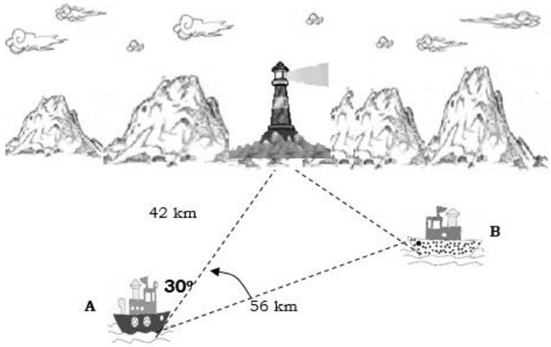
¿Cuál es el valor de la incógnita del problema?__________________________

¿A qué distancia se hallan los puntos “A” y “B”?_________________________

VI-57 Dada la figura, determina el valor de "x"



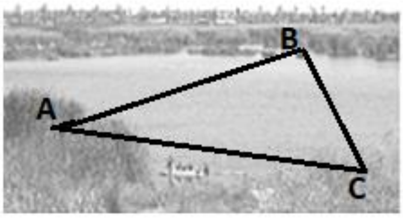
VI-58 ¿A qué distancia del faro se encuentra el navío B?




VI-59 Para medir el largo de un puente AB se dirigen desde un punto P las visuales a los extremos A y B. Si PA = 50m y PB = 80m. Calcula el largo del puente siendo $120°$ el ángulo formado por las dos visuales.

VI-60 La cumbre de un cerro se ve desde un punto P del llano bajo ángulo de elevación de $35°$. Al acercarse horizontalmente 2700m el ángulo de elevación es de $58°$. Calcula la altura del cerro.

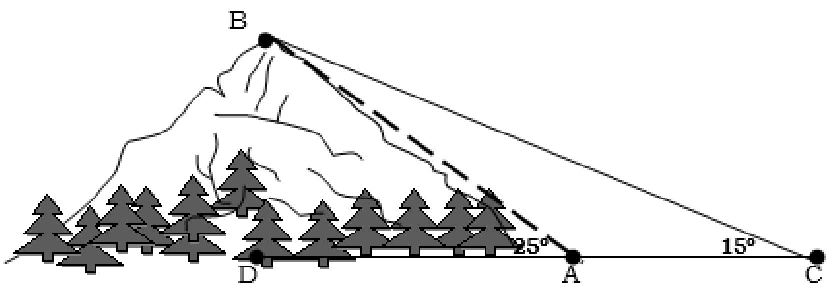
VI-61 Se desea conocer la distancia entre dos puntos A y B, inaccesibles entre sí, ubicados en los extremos de un pantano, sabiendo que la distancia de cada uno de ellos a un tercero C, es AC = 18m y BC = 30m y el ángulo comprendido es de $45°$.



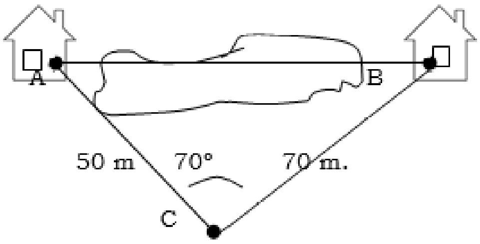

VI-62 Tres circunferencias, cuyos radios miden 11,5; 15 y 22,5cm respectivamente, son tangentes exteriores entre sí. Encuentra los ángulos que se forman cuando se unen los centros de las circunferencias.

VI-63 Dos carreteras rectas divergen formando un ángulo de $65°$. Dos automóviles salen de la intersección a las 14:00 hs.; uno viaja a 50km/h y el otro a 30 km/h. ¿Qué distancia separa los vehículos a la 14:30 hs?

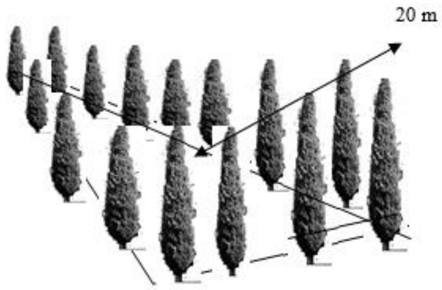
VI-64 Para determinar la longitud de un ascensor propuesto para una pista de esquí desde A hasta B, un topógrafo mide el ángulo DAB, que es de 25º, luego camina 1000m hasta el punto C y mide el ángulo ACB, que es de 15º. ¿Cuál es la distancia de A a B?



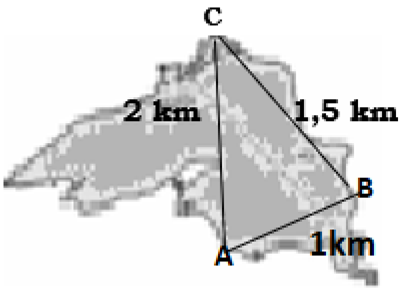
VI-65 Para determinar la distancia entre las casas A y B, un topógrafo mide el ángulo ACB y determina que mide 70º, después camina las distancias hacia cada casa, 50 y 70 m. respectivamente. ¿A qué distancia se encuentran las casas entre sí?



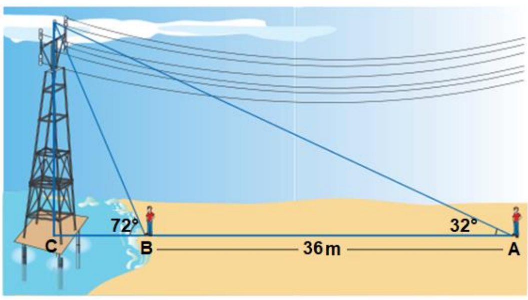

VI-66 ¿Qué cantidad de cipreses se deben comprar para colocarlos cada medio metro a lo largo del perímetro de un terreno triangular, si se sabe que uno de los lados del terreno mide 20 m, y los ángulos adyacentes al mismo miden 28º 57’ 18’’ y 46º 34’ 3’’?




VI-67 Tres personas están en tres puntos distintos de la orilla de un lago, la primera dista de la segunda 1 km, la segunda de la tercera 1,5km ésta de la primera 2km ¿Qué ángulos forman entre sí dichas personas? ¿Qué superficie tiene el lago, si ésta es los 5/3 de la superficie del triángulo que forman las 3 personas?



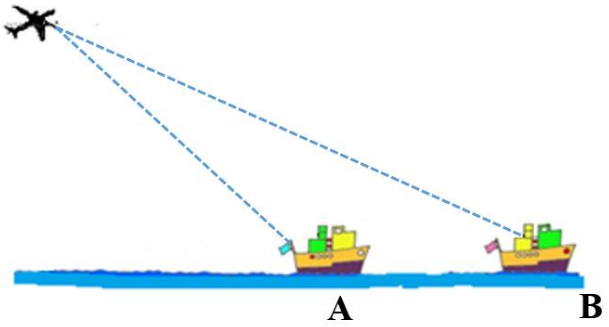

VI-68 Una torre de alta tensión está colocada dentro del mar sobre un soporte que flota exactamente al mismo nivel que la playa. Una persona de 1,7 m de alta observa desde la orilla de la playa (posición A) el extremo superior de la torre con un ángulo de elevación de 32°. Si la persona se acerca 36 metros hasta llegar a la orilla del mar (posición B), observa el extremo superior de la torre con un ángulo de elevación de 72°.




a) Determina la altura de la torre.
b) Halla la distancia entre la posición B y la base de la torre (posición C)
c) Calcula el ángulo de elevación con el que la persona observaría el extremo superior de la torre, si se ubicara en el punto medio entre las posiciones A Y B.

VI-69 Un avión está situado a 915 metros sobre el nivel del mar. Hay dos barcos en el mar. El piloto del avión observa uno de los barcos con un ángulo de depresión de 40° y observa al otro barco con un ángulo de depresión de 25°.

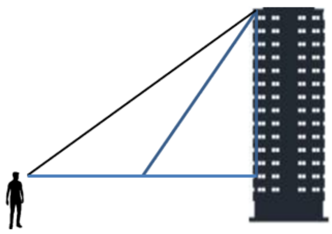
a) En la siguiente representación gráfica coloque los datos correspondientes.




b) Calcule la distancia que hay entre el avión y el barco que se encuentra en la posición A
c) Determine la distancia entre los dos barcos.

VI-70 Desde una determinada distancia un observador cuya altura es de 1,60m, avista la terraza de un edificio, con un ángulo de elevación de 47°. Si el observador se acerca 17,8m al edificio, observa la terraza con un ángulo de elevación de 75°.

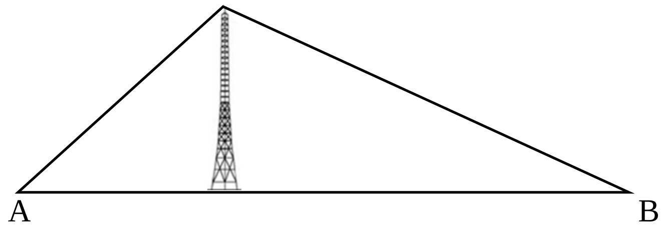
a) En la siguiente representación gráfica coloque los datos correspondientes.



b) Calcule la altura del edificio.
c) Calcule la distancia a la cual se encuentra el observador de la base del edificio, inicialmente.

V71- Dos observadores A y B ubicados a 126m de distancia entre sí observan el extremo superior de una antena con ángulos de elevación de $60°$ y $45°$ respectivamente.

a) En la siguiente representación gráfica coloque los datos correspondientes.




b) Calcule la distancia que hay desde A hasta el extremo superior de la antena.
c) Calcule la altura de la antena.

# 6.1 RESPUESTAS – TRIGONOMETRIA

VI-01
a. $\hat{\alpha} = 0,78540$ d. $\hat{\varepsilon} = 2,36503$ g. $\hat{\mu} = 1,92014$
b. $\hat{\beta} = 2,09440$ e. $\hat{\varphi} = 2,00000$ h. $\hat{\rho} = 1,00000$
c. $\hat{\delta} = -1,57080$ f. $\hat{\phi} = -0,75677$ i. $\hat{\theta} = 0,01012$

VI-02
a. $\hat{\alpha} = 180°$ d. $\hat{\varepsilon} = 360°$ g. $\hat{\mu} = 20°$
b. $\hat{\beta} = 120°$ e. $\hat{\varphi} = 330°$ h. $\hat{\rho} = -630°$
c. $\hat{\delta} = 114°35'30"$ f. $\hat{\phi} = 0°$ i. $\hat{\theta} = -270°43'21"$

VI-03 Longitud del arco ≅ 9,16 cm

VI-04 Área del sector ≅ 316,67 cm2

VI-05 Diámetro del círculo ≅ 3,74 m

VI-06 $\hat{\alpha} = 16°25'29"$

VI-07 a) $\hat{\alpha} = 0,4$ b) $\hat{\alpha} = 22°55'6"$ c) Área = 5$m^2$

VI-08 La distancia es de 1827,83 km aproximadamente.

VI-09
a) 0,70711 d) 0,00000 g) 0,15838
b) 0,78877 e) 2,53845 h) −1
c) 0,94249 f) no está definida i) 1,03782

VI-10
1)
$sen(\beta) = \frac{2,2cm}{3,4cm} = 0,647(0,643)$ $sen(\alpha) = \frac{2,6cm}{3,4cm} = 0,765(0,766)$
$cos(\beta) = \frac{2,6cm}{3,4cm} = 0,765(0,766)$ $cos(\alpha) = \frac{2,2cm}{3,4cm} = 0,647(0,643)$
$tan(\beta) = \frac{2,2cm}{2,6cm} = 0,846(0,839)$ $tan(\alpha) = \frac{2,6cm}{2,2cm} = 1,182(1,192)$
2)
$sen(\varphi) = \frac{2cm}{3,6cm} = 0,556(0,545)$ $sen(\delta) = \frac{3cm}{3,6cm} = 0,833(0,839)$
$cos(\varphi) = \frac{3cm}{3,6cm} = 0,833(0,839)$ $cos(\delta) = \frac{2cm}{3,6cm} = 0,556(0,545)$
$tan(\varphi) = \frac{2cm}{3cm} = 0,667(0,649)$ $tan(\delta) = \frac{3cm}{2cm} = 1,500(1,540)$

VI-11 b)

VI-12 1) $\hat{a} = 60º28'25"$ $\hat{c} = 29º31'35"$ 2) $\hat{b} = 74º32'54"$ $\hat{c} = 15º27'6"$

VI-13
a) $\hat{\phi}$= 71° 48’ 18” e) $\hat{\phi}$= 76° 41’ 57”
b) $\hat{\phi}$= 89° 25’ 37” f) $\hat{\phi}$= 71° 33’ 5”
c) $\hat{\phi}$= 81° 55’ 51” g) $\hat{\phi}$= 5° 37’ 55”
d) $\hat{\phi}$= 62° 31’ 32” h) $\hat{\phi}$= 50° 18’ 26”

VI-14
a) $\hat{\phi}$= 0,318 e) $\hat{\phi}$= 0,194
b) $\hat{\phi}$= 0,995 f) $\hat{\phi}$= 0,591
c) $\hat{\phi}$= 0,010 g) $\hat{\phi}$= 1,361
d) $\hat{\phi}$= 1,106 h) $\hat{\phi}$= 2,1002

VI-15

| | 1º cuadrante | 2º cuadrante | 3º cuadrante | 4º cuadrante |
|---|---|---|---|---|
| $sen(\hat{\beta}) > 0 \; y \; cos(\hat{\beta}) < 0$ | | X | | |
| $sen(\hat{\beta}) < 0 \; y \; tg(\hat{\beta}) < 0$ | | | | X |
| $tg(\hat{\beta}) > 0 \; y \; cos(\hat{\beta}) < 0$ | | | X | |
| $cot\,g\,(\hat{\beta}) < 0 \; y \; sen(\hat{\beta}) > 0$ | | X | | |
| $cos\,e\,c(\hat{\beta}) > 0 \; y \; tg(\hat{\beta}) > 0$ | X | | | |
| $sec(\hat{\beta}) > 0 \; y \; cot\,g\,(\hat{\beta}) < 0$ | | | | X |

VI-16 d)

VI-17 c)

VI-18 *a.* $50° < \hat{\theta} < 110°$

*b.* $27° < \hat{\theta} < 63°$

*c.* $10° < \hat{\theta} < 55°$ ó $100° < \hat{\theta} < 145°$

VI-19 a) $\hat{\alpha}_1$ =60°; $\hat{\alpha}_2$ =300°

b) $\hat{\alpha}_1$ =52° 58’ 50”; $\hat{\alpha}_2$ =127° 1’ 10”

c) $\hat{\alpha}_1$ =55° 56’ 33”; $\hat{\alpha}_2$ =304° 3’ 27”

d) $\hat{\alpha}_1$ =210°; $\hat{\alpha}_2$ =330°

e) $\hat{\alpha}_1$ =150° 0’ 10”; $\hat{\alpha}_2$ =209° 59’ 50”

f) $\hat{\alpha}_1$ =74° 47’ 31”; $\hat{\alpha}_2$ =254° 47’ 31”

g) $\hat{\alpha}_1$ =18° 9’ 4”; $\hat{\alpha}_2$ =161° 50’ 56”

h) $\hat{\alpha}_1$ =24° 58’ 33”; $\hat{\alpha}_2$ =204° 58’ 33”

VI-20 a) P(0,270 ; 0,963) b) P(–0,801 ; 0,599)

c) P(–0,647 ; –0,762) d) P(0,170 ; –0,985)

VI-21 a) $\hat{\theta}$= 53° 7’ 48” d) $\hat{\theta}$= 202° 37’ 12”

b) $\hat{\theta}$=118° 4’ 21” e) $\hat{\theta}$= 286° 15’ 37”

c) $\hat{\theta}$= 270° f) $\hat{\theta}$= 180°

VI-22

- Pertence al círculo trigonométrico: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, L, N.
- Pertenecen a la circunferencia trigonométrica: A, B, E, F, G.
- Están fuera del círculo trigonométrico: K, M, Ñ.

VI-23

| | *sen($\hat{\theta}$)* | *cos($\hat{\theta}$)* | *tg($\hat{\theta}$)* | *sec($\hat{\theta}$)* | *cosec($\hat{\theta}$)* | *cotg($\hat{\theta}$)* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a) | 0,6 | 0,8 | 0,75 | 1,25 | 1,67 | 1,33 |
| b) | -0,8 | 0,6 | -1,33 | 1,67 | -1,25 | -0,75 |
| c) | 0,55 | -0,83 | -0,67 | -1,20 | 1,80 | -1,5 |
| d) | -0,94 | 0,33 | -2,83 | 3 | -1,06 | -0,35 |
| e) | 0,4 | -0,92 | -0,44 | -1,09 | 2,5 | -2,29 |
| f) | 0,98576 | 0,16816 | 5,86204 | 5,94672 | 1,01445 | 0,17059 |

VI-24 Opción c)

VI-25 a) $x_1 = 60°$; $x_2 = 300°$; $x_3 = 240°$; $x_4 = 120°$

b) $x = 90°$

c) $x_1 = 90°$; $x_2 = 210°$; $x_3 = 330°$

d) $x_1 = 24° 54' 24''$; $x_2 = 155° 5' 36''$; $x_3 = 232° 19' 37''$; $x_4 = 307° 40' 23''$

e) No hay solución

g) $x_1 = 30°$; $x_2 = 90°$; $x_3 = 150°$; $x_4 = 210°$; $x_5 = 270°$; $x_6 = 330°$

VI-26 Opción c)

VI-27 $cos(\theta) = -\frac{\sqrt{8}}{3}$ ; $tg(\theta) = \frac{\sqrt{8}}{8}$ ; $sec(\theta) = \frac{-3\sqrt{8}}{8}$ ; $cosec(\theta) = -3$ ; $ctg(\theta) = \sqrt{8}$

VI-28 sen(θ)=0,82065 cos(θ)=0,57143

tg(θ)=1,43613 sec(θ)=1,75000

cosec(θ)=1,21855 cotg(θ)=0,69632

VI-29 a) $x \cong 10{,}39$ ; $y \cong 5{,}20$

b) $x \cong 4{,}95$ ; $y \cong 4{,}95$

c) $x \cong 6{,}46$; $y \cong 17{,}26$

VI-30 d)

VI-31 c)

VI-32 30°; 60° y 90°.

VI-33 $h = \frac{\sqrt{3}}{2}L$

VI-34 $ac = bc = 13{,}59cm$; $ab = 7{,}95cm$

VI-35 d)

VI-36 b)

VI-37 h = 29,8 m

VI-38 h = 324,28 m

VI-39 φ = 51° 57' 48''

VI-40 El túnel medirá 250,31 m de largo

VI-41 H = 109,8 m

VI-42 D =2 km

VI-43 R = 16,48 m

VI-44 P = 156,9 cm.

VI-45 D = 40 m

VI-46 A = 13,6 cm.
L = 20,73 m
D = 6,13 m

VI-47 d)

VI-48 c)

VI-49 3,69 km desde A al incendio y 5,42 km desde B al incendio.

VI-50 576,61 m desde A hasta C.

VI-51 163,8 cm la diagonal mayor y 114,7 cm la diagonal menor.

VI-52 φ = 24° 58’ 44”

VI-53 a) El rascacielos está, aproximadamente, a 71,62 m del pequeño edificio.
b) El rascacielos tiene una altura de 134,68 m.

VI-54 H = 17,87m

VI-55 D = 9,67 m

VI-56 La distancia entre A y B es 11,71 m.

VI-57 x = 1,5

VI-58 El navío B se halla a 28,74 km del faro.

VI-59 AB = 113,6m

VI-60 H = 3361m

VI-61 AB = 21,45m

VI-62 α = 75º 34’ 18’’ β= 43º 9’ 46’’ δ = 61º 15’ 56’’

VI-63 R: 23, 09 km.

VI-64 AB ≅ 1490,5 m.

VI-65 AB ≅ 70,75 m.

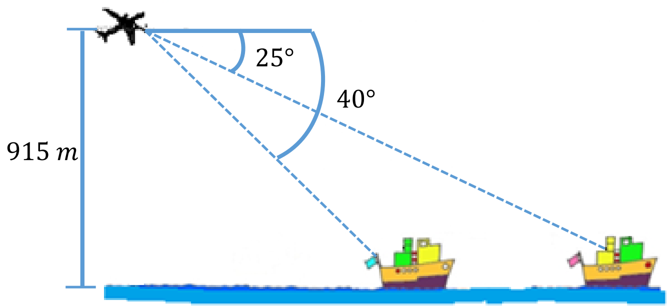
VI-66 R: 90 cipreces

VI-67 $\hat{A}$= 104º 28’ 39’’$\hat{B}$= 46º34’ 2’’ $\hat{C}$= 28º 57’ 19’’

$$\overset{\triangle}{Sup} = 0{,}7261\ km^2 \qquad Área\ del\ lago = 1{,}2103\ km^2$$

VI-68 a) La altura aproximada de la torre es de 28,22 m
b) La distancia entre las dos posiciones es de 9,17 m.
c) El ángulo de elevación sería de $46° \ 5' \ 9{,}59''$.

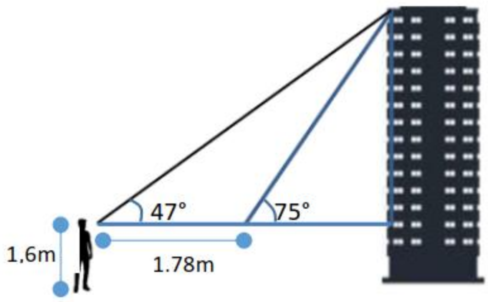
VI-69 a)




b) El barco de la posición A se encuentra a $1423{,}49\ m$.

c) La distancia entre los barcos es de $871{,}77\ m$.

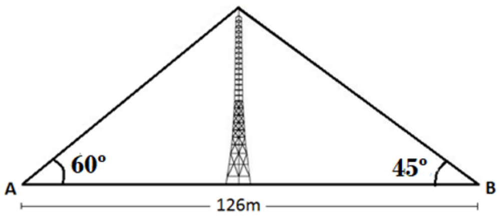
VI-70 a)




b) La altura del edificio es de $28{,}38\ m$.

c) La distancia a la cual se encuentra el observador inicialmente es de $24{,}98\ m$.

VI-71 a)




b) La distancia que hay desde A hasta el extremo superior de la antena es de $92{,}24m$.

c) La altura de la antena es de $79{,}88m$.